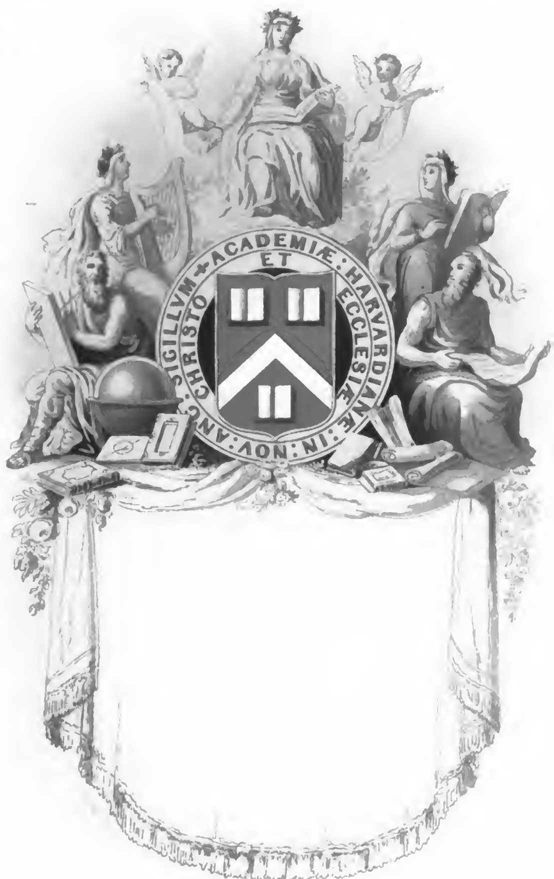
# SYSTEMATISCHE ENTWICKLUNG DER ABHÄNGIGKEIT ...

Jakob Steiner




SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIÆ

# Systematische Entwickelung

der

Abhängigkeit

# geometrischer Gestalten

von einander,

mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, etc.

von

*Jacob Steiner.*

»En observant ce que les résultats particuliers
»avaient de commun entre eux, on est successivement parvenu à des résultats fort étendus,
»et les sciences mathématiques sont à la fois
»devenues plus générales et plus simples.«

Laplace, Leçons à l'Ecole normale.

---

**Erster Theil.**

Mit vier lithographirten Tafeln.

---

Berlin,
verlegt bei G. Fincke.
1832.

Fünf Gebilde sinnig gestellt
Zeuger und Herrscher der räumlichen Welt.

„„Das ist Jacob Steiner""

Jacob Lüdy. 1901

Seiner Excellenz

dem

Herrn Geheimen Staatsminister,

# *Freiherrn von Humboldt*

widmet diese Schrift

als ein Zeichen

seiner innigsten

Verehrung und Dankbarkeit

der Verfasser.

Seinem Freunde
Jacob Jacobi, Vulgo II.

der

Verfasser.

# Vorrede.

Das vorliegende Werk enthält die Endresultate mehrjähriger Forschungen nach solchen räumlichen Fundamentaleigenschaften, die den Keim aller Sätze, Porismen und Aufgaben der Geometrie, womit uns die ältere und neuere Zeit so freigebig beschenkt hat, in sich enthalten. Für dieses Heer von auseinander gerissenen Eigenthümlichkeiten mufste sich ein leitender Faden und eine gemeinsame Wurzel auffinden lassen, von wo aus eine umfassende und klare Uebersicht der Sätze gewonnen, ein freierer Blick in das Besondere eines jeden und seiner Stellung zu den übrigen geworfen werden kann. Wenn Jemand alle bis jetzt bekannt gewordenen Sätze und Aufgaben nach den bisher üblichen Vorschriften zu beweisen und zu lösen sich vornehmen wollte, so wäre dazu viel Zeit und Mühe erforderlich, und am Ende hätte man doch nur eine Sammlung von auseinander liegenden, wenn auch sehr scharfsinnigen, Kunststücken, aber kein organisch zusammenhängendes Ganze zu Stande gebracht. Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen fol-

gerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäfs in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können. Hierbei macht weder die synthetische, noch die analytische Methode, den Kern der Sache aus, der darin besteht, dafs die Abhängigkeit der Gestalten von einander, und die Art und Weise aufgedeckt wird, wie ihre Eigenschaften von den einfachern Figuren zu den zusammengesetztern sich fortpflanzen. Dieser Zusammenhang und Uebergang ist die eigentliche Quelle aller übrigen vereinzelten Aussagen der Geometrie. Eigenschaften der Figuren (wie z. B. die conjugirten Durchmesser der Kegelschnitte; sechs Punkte oder Strahlen, welche Involution bilden; das mystische Sechseck und Sechsseit; u. s. w.), von deren Vorhandensein man sich sonst durch künstliche Beweise überzeugen mufste, und die, wenn sie gefunden waren, als etwas Wunderbares dastanden, zeigen sich nun als nothwendige Folgen der unscheinbarsten Eigenschaften der aufgefundenen Grundelemente, und jene sind a priori durch diese gesetzt.

Wenn nun wirklich in diesem Werke gleichsam der Gang, den die Natur befolgt, aufgedeckt

wird, so werden alle hier synthetisch entwickelten Resultate sich natürlicher Weise auch durch analytische Hülfsmittel auffinden lassen, was meines Erachtens durchaus nichts Ueberraschendes in sich tragen kann. Der Analyst, der dieses ausführt, hat nicht mehr als seine Pflicht gethan, wenn er jeden Fortschritt der Wissenschaft benutzt, und sich denselben so zur Lehre dienen läfst, dafs seine Methode darnach vervollständigt wird. Auch ist es recht eigentlich seine Sache, jene Resultate zu verallgemeinern, und ich sollte meinen, dafs seine Arbeit nicht an ihrem Werthe verlieren würde, wenn er es unterliefse, gegen seinen Wegweiser sich vornehm zu geberden.

Der Streit, welcher sich vor nicht langer Zeit zwischen den zwei, in Rücksicht auf die Geometrie verdienstvollsten, französischen Mathematikern, über den Vorzug des Prinzips der Dualität und der *Théorie des polaires reciproques* entspann *), wird, wie ich glaube, durch die vorliegende Entwickelung unzweideutig entschieden, so dafs ich es nicht für nöthig halte, hier darauf weiter einzugehen. Die Dualität tritt mit den Grundgebilden zugleich hervor, jene Theorie hingegen kommt erst später, als Resultat bestimmter Verbindungen der Grundgebilde, zum Vorschein. Wenn aber auch das Gergonnesche Prinzip sich in dieser Hinsicht als das primitivere, der Quelle näher liegende, bewährt, so hat doch Poncelet ein gleich grofses Verdienst, so viel zur Entwickelung und Förderung der synthetischen Geometrie beigetragen zu haben, dafs diese

---

*) *Bulletin universel*, août 1827, pag. 109, und *Annales de Mathématiques*, tom. XVIII, pag. 125.

fortan nicht mehr mit jener Geringschätzung behandelt werden darf, welche man ihr in neuerer Zeit gar zu oft und gar zu leichtfertig zu Theil werden liefs. Uebrigens tritt die genannte Theorie durch die gegenwärtige Entwickelung in vollständigerer und allgemeinerer Gestalt hervor, als es in ihrer früheren Darstellungsweise geschehen konnte, wobei indessen nicht zu übersehen ist, dafs der scharfsinnige Moebius zuerst eine freiere Auffassung dieser Theorie ans Licht gefördert hat (Barycentr. Calcül).

Das ganze Werk wird seiner äufseren Eintheilung nach aus fünf Theilen und zugleich aus fünf Abschnitten bestehen, von denen der erste: „projectivische Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel;" der zweite: „projectivische Ebenen und Strahlbüschel (im Raume);" der dritte: „projectivische Räume;" der vierte: „Correlations-Systeme und Netze (mit Einschlufs der Involutions-Systeme und Netze);" und der fünfte: „ausführliche und umfassende Behandlung der Curven und Flächen zweiten Grades, durch Konstruction und gestützt auf projectivische Eigenschaften," enthält. Aufserdem werden noch zwei Theile mit diesem Werke in Verbindung gebracht, wovon der eine: „über Punkte und Axen der mittlern Entfernung (mit Einschlufs der mittlern harmonischen Entfernung), über Transversalen, etc." handeln wird, und worauf vorhergegangene projectivische Eigenschaften angewandt werden; der andere Theil hingegen der Elementargeometrie gewidmet ist, und der Hauptsache

nach: „eine systematische Entwickelung der Aufgaben und Sätze über das Schneiden und Berühren der Kreise in der Ebene und auf der Kugelfläche, und der Kugeln" enthalten wird. Dieser letztere Theil sollte schon früher im Druck erscheinen und war bereits im J. 1826 bis auf einen Anhang, welcher verschiedene Anwendungen der stereographischen Projection enthalten sollte, ausgearbeitet, was auch schon anderweitig angegeben worden (Journal f. Mathem. Bd. I, S. 163.); allein da mehrere darin enthaltene Betrachtungen nur besondere Fälle von solchen sind, welche in den erstgenannten fünf Theilen vorkommen, und wiederum einige über Kreise und Kugeln selbstständig entwickelte Sätze, sich unmittelbar auf bestimmte Systeme von Curven und Flächen zweiten Grades übertragen lassen, wie solches in jenen fünf Theilen nachgewiesen wird: so ist es zweckmäſsiger, ihn erst nach diesen folgen zu lassen.

Die Hauptresultate, welche in diesem Werk entwickelt werden, habe ich schon vor mehreren Jahren gefunden (und zwar die letzten vor der Mitte des Jahres 1828.), in einer Epoche wo mir, als Privatlehrer, mehr Zeit und Muſse zu Gebote stand, als seither, wo nicht selten drückende Amtsgeschäfte die Ausarbeitung verzögerten. Daſs mittlerweile Einiges davon ins Publicum gekommen ist (wie z. B. namentlich ein Theil der Resultate in §. 59. dieses Bandes), ist leicht erklärlich, da ich kein Geheimniſs daraus machte. Diese Theilnahme war mir ein Beweis, daſs meine Untersuchungen Beifall finden, sie erregt jetzt in mir die Hoffnung, daſs nun auch die vollstän-

dige Mittheilung derselben nicht unberücksichtigt bleiben werde, denn es ist nicht unwahrscheinlich, daſs durch gehörige Verschmelzung von Resultaten und Ideen des Einen mit Methoden des Andern noch mehr als eine neue Entdeckung sich machen lassen werde.

Da frühere Arbeiten von mir, welche ich in einzelnen Abhandlungen im Journal für Mathematik und in den Annales de Mathématiques bekannt gemacht habe, den Beifall von unparteiischen Sachkennern sich erworben haben *), so glaube ich wohl mit einiger Zuversicht die Hoffnung hegen zu dürfen, daſs nun auch der gegenwärtigen Arbeit, welche nach derselben Methode, aber in einer allgemeineren, umfassenderen Anlage begonnen ist, eine nicht minder günstige Aufnahme zu Theil werden wird. Hierzu füge ich den Wunsch, daſs der geneigte Beurtheiler die von mir unterlassene Auseinandersetzung des Verhältnisses meiner Arbeit zu den ältern und neuern Arbeiten Anderer über denselben Gegenstand, ergänzen möge. Alle wichtigern, schon von Andern aufgestellten Sätze, habe ich, so weit mein Wissen reichte, ihren Urhebern einzeln zugeschrieben.

Berlin, im September 1832.

**Steiner.**

---

*) Siehe *Annales de Mathém.* tom. XVII, (No. 7, 10.), XVIII u. XIX.; *Bulletin des sciences mathématiques*, tom. VII, VIII, IX, X u. XI, 1827—1829; Allgemeine Literatur-Zeitung, 1831; Mathemat. Wörterb. Thl. 5 u. 6; u. s. w. Auch sind viele Resultate daraus schon in Lehrbücher und andere Werke aufgenommen worden, so wie auch eine Abhandlung und mehrere einzelne meiner Sätze von Gergonne, dem Herausgeber der genannten Annalen, ins Französische übersetzt worden sind.

# Inhaltsverzeichnifs des ersten Theils.

Seite

### Zweite Anmerkung.



## Drittes Kapitel.

### Erzeugung der Linien und der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung durch projectivische Gebilde.



### Allgemeine Anmerkung.



### Anhang.

# Einleitende Begriffe.

1. Die in der Geometrie erforderlichen Grundvorstellungen sind: der Raum, die Ebene, die Gerade (gerade Linie) und der Punkt. Zum Behufe der in dem vorliegenden Werke durchzuführenden Betrachtungen ist es erforderlich einerseits, diese Elemente in Ansehung der Art und Weise, wie sie einander untergeordnet sind, d. h., wie die einen die anderen in sich enthalten, und andererseits, bestimmte Zusammenstellungen derselben auf folgende Weise scharf aufzufassen und als Grundgebilde festzuhalten.

I. Die Gerade. In der Geraden sind eine unzählige Menge unmittelbar auf einander folgender Punkte denkbar, die sich, von irgend einem derselben ausgehend, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin ins Unendliche erstrecken.

II. Der ebene Strahlbüschel. Durch jeden Punkt in einer Ebene sind unzählige Gerade möglich; die Gesammtheit aller solcher Geraden soll „ebener Strahlbüschel," oder „Strahlbüschel in der Ebene" heifsen, nämlich die Geraden sollen, in Ansehung dieser Zusammenstellung, „Strahlen" heifsen, und der Punkt, in welchem sich die Strahlen schneiden, soll „Mittelpunkt" des Strahlbüschels genannt werden.

III. Der Ebenenbüschel. Durch jede Gerade sind unendlich viele Ebenen denkbar; alle solche Ebenen zusammengefafst sollen „Ebenenbüschel," und

die Gerade, in welcher sich die Ebenen schneiden, soll „Axe" des Ebenenbüschels heifsen.

IV. Die Ebene. In der Ebene sind zahllose Gerade und Punkte, oder ebene Strahlbüschel enthalten. (Jeder Punkt der Ebene ist Mittelpunkt eines in ihr liegenden Strahlbüschels.)

V. Der Strahlbüschel im Raume. Durch jeden Punkt im Raume sind, nach allen möglichen Richtungen, unzählige Gerade oder Strahlen denkbar; alle solche Strahlen insgesammt sollen „Strahlbüschel im Raume," oder schlechthin „Strahlbüschel," und der Punkt, in welchem sich die Strahlen schneiden, soll „Mittelpunkt" des Strahlbüschels heifsen. Ein solcher Strahlbüschel enthält nicht nur unendlich viele Strahlen, sondern er umfafst auch zahllose ebene Strahlbüschel (II.) und Ebenenbüschel (III.) als untergeordnete Gebilde oder Elemente, denn es giebt endlos viele Ebenen, die durch dessen Mittelpunkt gehen, und alle Strahlen, die in eine solche Ebene fallen, bilden einen ebenen Strahlbüschel, und alle solche Ebenen, die durch einen und denselben Strahl gehen, bilden einen Ebenenbüschel; von solchen ebenen Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln soll aber gesagt werden, sie liegen im Strahlbüschel im Raume.

Die Betrachtung der vorstehenden fünf Raumgebilde, nämlich das Beziehen derselben aufeinander bei verschiedenartigen Verbindungen und Zusammenstellungen, macht den Gegenstand der ersten fünf Theile des vorliegenden Werkes aus. Das Ergebnifs wird zeigen, dafs diese Gebilde in der That die eigentliche Grundlage der synthetischen Geometrie sind.

Die Fundamentalbeziehungen, auf welchen alle Untersuchungen beruhen, sind folgende.

Es werden aufeinander bezogen:

a) Gerade und ebene Strahlbüschel. Zuerst werden eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel aufeinander bezogen, so dafs ihre Elemente ge-

paart sind, d. h., dafs jedem Punkt der Geraden ein bestimmter Strahl des Strahlbüschels entspricht. Sodann werden sowohl Gerade unter sich, als ebene Strahlbüschel unter sich ähnlicherweise aufeinander bezogen.

b) Ebenenbüschel und sowohl Gerade als ebene Strahlbüschel. Ein Ebenenbüschel und eine Gerade, oder ein ebener Strahlbüschel werden aufeinander bezogen, so dafs ihre Elemente gepaart sind, d. h., dafs jeder Ebene des Ebenenbüschels ein bestimmter Punkt der Geraden, oder ein bestimmter Strahl des Strahlbüschels entspricht. Aehnlicherweise werden Ebenenbüschel unter sich aufeinander bezogen.

c) Ebenen und Strahlbüschel (im Raume). Zuerst werden eine Ebene und ein Strahlbüschel so aufeinander bezogen, dafs ihre Elemente sich wie folgt entsprechen:

| | | |
|---|---|---|
| jedem Punkt in der Ebene | ..... | ein Strahl im Strahlbüschel, |
| jeder Geraden in der Ebene | ..... | eine Ebene im Strahlbüschel. |

Sodann geschieht die Beziehung auch so, dafs ihre Elemente einander in anderer Ordnung entsprechen. Aehnlicherweise werden sowohl Ebenen unter sich, als Strahlbüschel unter sich aufeinander bezogen.

d) Räume unter sich. Zuerst werden zwei Räume (d. h. der ganze oder absolute Raum doppelt gedacht, so dafs beide Räume einander durchdringen) so aufeinander bezogen, dafs jedem Element des einen Raums ein bestimmtes, gleichartiges Element des andern Raums entspricht; und weiter werden sie so auf einander bezogen, dafs auch ungleichartige Elemente einander entsprechen.

So wie die Grundgebilde ihrer Natur nach einander entgegengesetzt sind, nämlich

α) die Gerade ..... dem ebenen Strahlbüschel,
β) die Gerade ..... dem Ebenenbüschel,
γ) der ebene Strahlbüschel ..... dem Ebenenbüschel,
δ) die Ebene ..... dem Strahlbüschel

und sich solchergestalt aufeinander beziehen lassen, dafs ihre Elemente einander paarweise entsprechen: eben so stehen auch, im Allgemeinen, ihre Eigenschaften, ihre Verbindungen (zu Figuren) und die aus diesen hervorgehenden Sätze einander auf bestimmte Weise entgegen, d. h., kommen der einen Art von Gebilden gewisse Eigenschaften oder Sätze zu, so finden bei der jedesmaligen entgegengesetzten Art von Gebilden ebenfalls bestimmte, jenen entsprechende, aber ihnen entgegengesetzte, Eigenschaften und Sätze statt. Das Wesen dieser Dualität von Eigenschaften und Sätzen ist also durch die Grundgebilde selbst, d. h. durch die umfassende Vorstellung der Raumelemente, nothwendig bedingt. Damit die Begründung dieser Dualität auf naturgemäfse, klare Weise hervortrete, und sich als wahr bewähren möge, soll die Betrachtung, so viel es sich thun läfst, so geführt werden, dafs die einander entgegenstehenden Gebilde immer zugleich untersucht, ihre entsprechenden Eigenschaften und Sätze zugleich entwickelt und neben einander gestellt werden.

Der Hauptinhalt, oder das Wesentliche der gesammten Resultate die durch dieses Werk erzielt und erreicht werden, besteht, wie es sich schon aus der vorstehenden Uebersicht ohngefähr entnehmen läfst: „In Untersuchungen über die Abhängigkeit der Gestalten (Figuren) von einander."

# Erster Abschnitt.

## Betrachtung der Geraden, der ebenen Strahlbüschel und der Ebenenbüschel in Hinsicht ihrer projectivischen Beziehungen unter einander.

## Erstes Kapitel.

### Von projectivischen Geraden und ebenen Strahlbüscheln in der Ebene.

**Eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel.**

2. Befinden sich ein ebener Strahlbüschel B (Fig. 1.) und irgend eine Gerade A, die nicht durch dessen Mittelpunkt geht, in einer Ebene, so haben sie folgende Beziehung zu einander.

Durch jeden Punkt 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡,..... der Geraden geht ein Strahl a, b, c, d,..... des Strahlbüschels, und umgekehrt, jeder Strahl des letzteren begegnet der Geraden in irgend einem Punkte. Um die Aufeinanderfolge der Strahlen sowohl als der Punkte richtig aufzufassen, lasse man in der Vorstellung einen Strahl sich bewegen, so dafs er nach und nach in die Lage eines jeden der übrigen gelangt, so wird der ihm zugehörige Punkt gleichzeitig die Gerade durchlaufen, und nach und nach

die Stelle eines jeden der übrigen Punkte einnehmen. Man lasse z. B. den Strahl p, vom Mittelpunkte B aus betrachtet, sich rechtsherum bewegen, so dafs er nacheinander in die Lage von d, a, f, q, h, c, b kommt, so wird der Punkt 𝔭 die Gerade so durchlaufen, dafs er nacheinander in die Stellen 𝔡, 𝔞, 𝔣, 𝔮, 𝔥, 𝔠, 𝔟 gelangt, und folglich sich stets nach einer und derselben Richtung hin bewegt. Nur in der einzigen besonderen Lage des Strahles, wo er nämlich mit der Geraden A parallel ist, welches etwa bei q der Fall sein mag, findet kein wirkliches Schneiden desselben mit der Geraden statt; da aber sowohl vor als nach dieser Lage stets ein wirkliches Schneiden statt findet, und zwar, da der unmittelbar vorhergehende Durchschnitt in der gröfstmöglichen Ferne auf der Seite über 𝔥 hinaus, und der unmittelbar nachfolgende Durchschnitt in der gröfstmöglichen Ferne auf der anderen Seite über 𝔣 hinaus liegt, so soll in der Folge der Uebereinstimmung wegen gesagt werden, der Strahl q sei nach dem unendlich entfernten Punkte der Geraden A gerichtet, und es soll dieser unendlich entfernte Punkt, wenn gleich derselbe in der Figur nicht wirklich anzutreffen ist, durch 𝔮 bezeichnet werden. Demnach hätte die Gerade A nur einen unendlich entfernten Punkt 𝔮, und man kann sich denselben sowohl nach der einen Seite (über 𝔥 hinaus) als nach der anderen (über 𝔣 hinaus) hin liegend vorstellen*). Auch folgt hiernach, dafs umgekehrt ein

*) Dafs in einer Geraden nur ein einziger unendlich entfernter Punkt gedacht werden darf, wird in der Folge durch viele unbestreitbare Thatsachen bestätiget werden. Dahin gehören z. B. die Asymptoten der Hyperbel. Eine Gerade kann bekanntlich die Hyperbel nur in einem Punkte berühren. Nun wird aber allgemein die Asymptote als Tangente angesehen, deren Berührungspunkt unendlich entfernt ist; da aber zwei Arme der Hyperbel,

Strahl, der nach dem unendlich entfernten Punkte der Geraden A gerichtet ist, nothwendiger Weise mit ihr parallel sein mufs.

Von den Punkten in der Geraden A zeichnet sich demnach einer vor allen übrigen auf eine eigenthümliche und bestimmte Weise aus, nämlich der unendlich entfernte Punkt q. Die besondere Eigenschaft dieses Punktes gewährt in der Folge öfter grofse Vortheile, wenn man ihn, anstatt irgend eines der übrigen Punkte zu Hülfe nimmt. Der ihm zugehörige Strahl q, der nämlich mit der Geraden A parallel ist, soll von nun an „Parallelstrahl" heifsen. Dieser Strahl gewährt ähnliche Vortheile, wie jener Punkt, nach welchem er gerichtet ist.

Hat man auf obige Weise einen ebenen Strahlbüschel B und eine Gerade A dergestalt auf einander bezogen, dafs ihre Elemente paarweise zusammengehören, nämlich dafs die Punkte a, b, c, d..... in der Geraden A den Strahlen a, b, c, d..... im Strahlbüschel B entsprechen, so kann man diese Beziehung festhalten, während man die Gebilde (A, B) selbst auf irgend eine Weise ihre ursprüngliche Lage ändern läfst, d. h., man kann dieselben in eine solche Lage denken, wie etwa in (Fig. 2.), wo zwar nicht mehr die Strahlen des Strahlbüschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Geraden gehen, aber wo sowohl jene Strahlen für sich, als diese Punkte für sich ihre gegenseitige Lage nicht geändert haben. Jede solche veränderte Lage der Gebilde, wo nämlich die Strahlen des Strahlbüschels B nicht mehr

nach entgegengesetzten Seiten hin, sich der Asymptote in's Unendliche fort gleichmäfsig nähern, so mufs folglich ihr Berührungspunkt sowohl nach der einen als nach der anderen Seite hin unendlich entfernt liegen, und folglich ist in der Asymptote nur ein einziger unendlich entfernter Punkt anzunehmen.

durch die ihnen ursprünglich zugehörigen Punkte der Geraden A gehen, soll fortan „schiefe Lage" heifsen, wogegen die ursprüngliche Lage „perspectivisch" genannt werden soll. Ferner sollen die Gebilde A, B, wenn sie auf die angegebene Weise aufeinander bezogen sind, dafs nämlich ihre Elemente (Punkte und Strahlen) nach der Ordnung in der sie einander paarweise entsprechen, bestimmt und festgehalten sind, „projectivisch" heifsen. Wenn übrigens in der Folge gesagt wird, zwei Gebilde A, B seien perspectivisch, so will dies so viel sagen, als die Gebilde seien projectivisch und befinden sich in perspectivischer Lage.

Die so eben festgestellten Benennungen, die leicht unpassend scheinen dürften, werden durch ihre Uebereinstimmung mit anderen Benennungen, welche ganz sachgemäfs sind, und weiter unten festgesetzt werden, gerechtfertigt.

3. Befinden sich ein ebener Strahlbüschel B und eine Gerade A, die projectivisch sind, in perspectivischer Lage, so ist mit jedem Strahl des Strahlbüschels der ihm entsprechende Punkt in der Geraden, und umgekehrt mit dem letzteren der erstere unmittelbar gegeben. Anders verhält es sich, wenn sich die Gebilde in schiefer Lage befinden. Hier wird man nur, wenn mehrere entsprechende Elementenpaare gegeben sind, durch dieselben mittelst bestimmter Gesetze (Relationen) zu jedem anderen Element des einen Gebildes das entsprechende Element des andern Gebildes finden, oder die Gebilde in ihre ursprüngliche, perspectivische Lage zurückbringen können. Diese Gesetze sollen nun zunächst gesucht werden.

Die Punkte in der Geraden A sind unter sich durch ihre Abstände von einander, und die Strahlen

des Strahlbüschels B sind unter sich durch die zwischen ihnen liegenden Winkel bestimmt. Daher müssen sich die genannten Gesetze auf diese Abstände und Winkel beziehen. Die einfachste Bestimmung eines Winkels besteht aber darin, daſs man zwischen seinen Schenkeln ein rechtwinkliges Dreieck annimmt und das Verhältniſs zweier Seiten desselben festhält. Dieses führt daher zu folgenden Betrachtungen.

Es sei p (Fig. 1.) derjenige Strahl, der auf der Geraden A senkrecht ist. Aus einem beliebigen Punkte $\alpha$ des Strahles a und aus $\mathfrak{a}$ seien auf den Strahl d die Lothe $\alpha\delta$, $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$ herabgelassen, dann sind einerseits die rechtwinkligen Dreiecke $B\mathfrak{p}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}$, und andererseits die rechtwinkligen Dreiecke $B\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$ und $B\alpha\delta$ ähnlich, so daſs:

$$\frac{B\mathfrak{p}}{B\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}, \text{ und } \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1}{B\mathfrak{a}} = \frac{\alpha\delta}{B\alpha},$$

woraus durch Verbindung folgt:

$$1. \quad B\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{d} = B\mathfrak{a}\,.\,B\mathfrak{d}\,.\,\frac{\alpha\delta}{B\alpha}$$

Durch das Verhältniſs $\alpha\delta : B\alpha$ wird der Winkel zwischen den Strahlen a, d bestimmt, oder gemessen, und zwar ist dieses Verhältniſs von der Lage des angenommenen Punktes $\alpha$ unabhängig, d. h., es bleibt unverändert, wo man auch diesen Punkt in dem Strahle a annehmen mag. Ein solches winkelmessendes Verhältniſs nennt man gewöhnlich Sinus, so daſs, wenn man den genannten Winkel durch (ad) bezeichnet, das in Rede stehende Verhältniſs durch sin(ad) vorgestellt wird. Diese Bezeichnung kann hier beibehalten werden, ohne daſs dadurch die Art der Betrachtung (die Methode) aufhört synthetisch zu sein, weil durch dieselbe nur ein gewisses, durch zwei Gerade ($\alpha\delta$, $\alpha$B) darstellbares, den gedachten Winkel bestimmendes Ver-

hältnifs angedeutet wird. Die Gleichung (1) verwandelt sich dadurch in folgende:

$$2.\quad B\mathfrak{p} . \mathfrak{a}\mathfrak{d} = B\mathfrak{a} . B\mathfrak{d} . \sin(ad)$$

oder:

$$3.\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} = \frac{B\mathfrak{a} . B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}$$

„Dieser Ausdruck (3) zeigt die Beziehung die zwischen einem Winkel (ad) des Strahlbüschels B und dem ihm entsprechenden Abschnitt $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ der Geraden A statt findet."

Dieselbe Beziehung läfst sich, wie es der Gegensatz erfordert, andererseits auf entsprechende Weise durch

$$4.\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} = \frac{B\mathfrak{p}}{\sin(Aa) . \sin(Ad)}$$

ausdrucken, wovon man sich leicht überzeugen wird*).

4. Da man auf gleiche Weise zwischen jedem Winkel des Strahlbüschels B und dem ihm entsprechenden Abschnitte der Geraden A einen ähnlichen Ausdruck findet wie der eben gefundene (§. 3, 3.), so hat man für vier beliebige Elementenpaare, etwa für a, b, c, d und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ nachstehende sechs Ausdrücke:

$$1.\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} = \frac{B\mathfrak{a} . B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}, \qquad 4.\quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\sin(bc)} = \frac{B\mathfrak{b} . B\mathfrak{c}}{B\mathfrak{p}},$$

$$2.\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\sin(ac)} = \frac{B\mathfrak{a} . B\mathfrak{c}}{B\mathfrak{p}}, \qquad 5.\quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\sin(bd)} = \frac{B\mathfrak{b} . B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}},$$

$$3.\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\sin(ab)} = \frac{B\mathfrak{a} . B\mathfrak{b}}{B\mathfrak{p}}, \qquad 6.\quad \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\sin(cd)} = \frac{B\mathfrak{c} . B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}.$$

Vier von diesen Ausdrücken, nämlich (1, 2, 4, 5), lassen sich, wie leicht zu sehen, so verbinden, dafs man hat:

---

*) Diese Beziehung (3, 4,) wird sich in der Folge noch öfter als sehr fruchtbar bewähren.

$$7. \quad \frac{\mathfrak{ad}}{\sin(ad)} : \frac{\mathfrak{bd}}{\sin(bd)} = \frac{\mathfrak{ac}}{\sin(ac)} : \frac{\mathfrak{bc}}{\sin(bc)}$$

oder:

$$\text{I.} \quad \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} : \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}$$

Dieser Ausdruck ist, wie man sieht, nicht mehr von der Lage der Gebilde B, A abhängig, da in ihm nicht mehr die begrenzten Theile B$\mathfrak{a}$, B$\mathfrak{b}$, .... der Strahlen vorkommen, er gilt demnach sowohl für die schiefe als perspectivische Lage der Gebilde, und folglich enthält er das oben (§. 3.) verlangte Gesetz. Nämlich er zeigt:

„Dafs bei irgend vier entsprechenden Elementenpaaren a, b, c, d und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ein gewisses Doppelverhältnifs [($\mathfrak{ad}$:$\mathfrak{bd}$):($\mathfrak{ac}$:$\mathfrak{bc}$)], gebildet aus vier Abschnitten der Geraden A, gleich ist dem Doppelverhältnifs [(sin (ad) : sin (bd)) : (sin(ac) : sin(bc))], welches auf entsprechende Weise aus den Sinufsen derjenigen Winkel des Strahlbüschels B, die jenen Abschnitten entsprechen, gebildet ist."

Die Art, wie die Doppelverhältnisse zusammengesetzt sind, ist leicht zu sehen. Nämlich das Doppelverhältnifs links ist aus den vier Abständen zweier Punkte ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) von den beiden übrigen ($\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$) gebildet, und zwar so, dafs das Verhältnifs ($\mathfrak{ad}$ : $\mathfrak{bd}$) der Abstände der zwei ersteren Punkte von einem der letzteren ($\mathfrak{d}$) durch das Verhältnifs ($\mathfrak{ac}$ : $\mathfrak{bc}$) ihrer Abstände von dem anderen ($\mathfrak{c}$), in gleicher Ordnung genommen, gemessen wird. Das Doppelverhältnifs rechts ist auf entsprechende Weise zusammengesetzt.

Es ist gleichgültig, welches der beiden Punktenpaare oder Strahlenpaare man als das erste annimmt, denn die Glieder des obigen Ausdrucks (I.) lassen sich,

ohne dafs dadurch die Gleichung gestört wird, wie folgt umstellen

$$\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{ac}} : \frac{\mathfrak{bd}}{\mathfrak{bc}} = \frac{\sin(ad)}{\sin(ac)} : \frac{\sin(bd)}{\sin(bc)}$$

wo nun, im Vergleich mit vorhin, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ das erste und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ das zweite Punktenpaar ist; und wo Aehnliches von den beiden Strahlenpaaren gilt.

Die vier Punkte, so wie die vier Strahlen aber lassen sich auf drei wesentlich verschiedene Arten einander paarweise entgegenstellen, nämlich

α) die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ den Punkten $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; α) die Strahlen a,b den Strahlen c,d;
β) » » $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ » » $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$; β) » » a,c » » b,d;
γ) » » $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}$ » » $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. γ) » » a,d » » b,c.

Da man für jede dieser drei Zusammenstellungen auf gleiche Weise einen ähnlichen Ausdruck findet, wie der obige (I.), so hat man statt des letzteren zugleich folgende drei Ausdrücke:

$$\text{II.} \begin{cases} 8. & \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} \\ 9. & \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cb}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{cd}} = \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} \\ 10. & \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{db}} : \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{dc}} = \frac{\sin(ab)}{\sin(db)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(dc)} \end{cases}$$

Je zwei Punkte oder Strahlen, die bei einer von diesen drei Zusammenstellungen als ein Paar zusammengefafst werden, sollen fortan „zugeordnete" Punkte oder Strahlen heifsen.

In Hinsicht der gegenseitigen Lage der zwei zugeordneten Punktenpaare oder Strahlenpaare, sind zwei merklich verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich:

a) entweder folgen die Punkte oder Strahlen jedes Paares unmittelbar nacheinander, wie z. B. in den beiden Zusammenordnungen (β) und (γ); oder:

b) die Punkte oder Strahlen der beiden Paare folgen abwechselnd aufeinander, wie z. B. in der Zusammenordnung ($\alpha$).

Diese Fälle sind immer für die vier Punkte und für die ihnen entsprechenden vier Strahlen übereinstimmend, d. h., befinden sich erstere im Falle (a), so sind es auch letztere, und befinden sich erstere im Falle (b), so sind es auch die letzteren; und auch umgekehrt.

5. Aus dem allgemeinen Gesetze (§. 4.) über vier beliebige Elementenpaare der projectivischen Gebilde A, B lassen sich unmittelbar nachstehende Folgerungen ziehen.

Hält man, bei der perspectivischen Lage der Gebilde (Fig. 1.), die vier Punkte 𝔞, 𝔡, 𝔟, 𝔠 in der Geraden A fest, während man den Mittelpunkt B des Strahlbüschels B sich beliebig in der Ebene herum bewegen läfst, sowohl auf der einen als auf der anderen Seite der Geraden A, so ändern sich zwar die Winkel, welche die vier Strahlen a, d, b, c mit einander einschliefsen, in jedem Augenblicke, aber die aus den Sinufsen dieser Winkel zusammengesetzten Doppelverhältnisse in den obigen Ausdrücken (§. 4, II.) behalten unveränderliche Werthe, nämlich diese Werthe sind stets den Werthen der entsprechenden Doppelverhältnisse (links) gleich, welche aus den Abständen der vier festen Punkte 𝔞, 𝔡, 𝔟, 𝔠 von einander zusammengesetzt sind. — Werden umgekehrt die vier Strahlen a, d, b, c des Strahlbüschels B in bestimmter Lage festgehalten, während die Gerade A ihre Lage auf alle mögliche Weise ändert, so ändern sich zwar mit der Lage der Geraden auch zugleich ihre Abschnitte zwischen den jedesmaligen vier Durchschnittspunkten 𝔞, 𝔡, 𝔟, 𝔠, aber die aus diesen Abschnitten zusammengesetzten Doppelverhält-

ohne dafs dadurch die Gleichung gestört
umstellen

$$\frac{ab}{ac} : \frac{bb}{bc} = \frac{\sin(ad)}{\sin(ac)} : \frac{\sin}{\sin}$$

wo nun, im Vergleich mit vorhin, c
und a und b das zweite Punktenpaar je
liches von den beiden Strahlenpaaren

Die vier Punkte, so wie die
lassen sich auf drei wesentlich verschie
ander paarweise entgegenstellen, näml

α) die Punkte a, b den Punkten c, b; α) die Str
β) " " a, c " " b, b; β) "
γ) " " a, b " " b, c. γ) "

Da man für jede dieser drei
auf gleiche Weise einen ähnlichen
der obige (I.), so hat man statt
folgende drei Ausdrücke:

II.
8. $\frac{ac}{bc} : \frac{ab}{bb} =$
9. $\frac{ab}{cb} : \frac{ab}{cb}$
10. $\frac{ab}{bb} :$

Je zwei Punkte o
diesen drei Zusamm
mengefafst werden, s
oder Strahlen heis

In Hinsicht d
ordneten Punkt
merklich versc

a) entweder
Paares
beiden

... r Lage befinden, in
... erspectivische Lage

... ie folgt noch näher erör-

... ei Elementenpaare a, b, c
... so kann daraus zu jedem
... n Strahl d des Strahlbü-
... Punkt d in der Geraden A,
... wenn er gegeben ist, kann
... Denn vermöge eines jeden
... II.), z. B. vermöge des

$$\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

... erth des Verhältnisses ad : bd,
... der Werth des Verhältnisses
... die jedesmaligen übrigen drei

... das Verhältnifs ad : bd gegeben
... a, b fest sind, der gesuchte Punkt
... zwei Stellen dieser Bedingung ge-
... und diese in Bezug auf die zwei fe-
... dadurch unterschieden, dafs der Punkt
... zwischen und das andere Mal jen-
... liegt. Von diesen zwei Lagen kann
... e d jedesmal nur eine zukommen, und
... ch die gegenseitige Lage der vier gege-
... entschieden, welche von beiden es sei,
... ndem die einander zugeordneten Strahlen-
... b, c und d nacheinander oder abwech-
... folgen, findet auch bei den Punktenpaaren
... c und d Folge oder Abwechselung statt
... wodurch dann jedesmal entschieden werden

nisse (§. 4, II.) behalten stets dieselben Werthe, weil sie nämlich stets den Werthen der entsprechenden Doppelverhältnisse rechts gleich sind. Es folgt daraus der nachstehende Doppelsatz.

„Bei allen Strahlbüscheln, von welchen vier Strahlen durch die nämlichen vier bestimmten Punkte (a, d, b, c) einer Geraden A gehen, haben die drei Doppelverhältnisse, die sich aus den Sinussen der von den jedesmaligen vier Strahlen eingeschlossenen Winkel zusammensetzen lassen, einerlei Werthe;" nämlich diese Werthe sind jedesmal den Werthen der drei Doppelverhältnisse gleich, welche aus den Abständen der vier festen Punkte von einander zusammengesetzt sind.

„Bei allen Geraden, welche die nämlichen vier bestimmten Strahlen (a, d, b, c) eines Strahlbüschels B schneiden, haben die drei Doppelverhältnisse, die sich aus den Abständen der jedesmaligen vier Durchschnittspunkte (a, d, b, c) von einander zusammensetzen lassen, einerlei Werthe;" nämlich diese Werthe sind jedesmal den Werthen der drei Doppelverhältnisse gleich, welche aus den Sinussen der von den vier festen Strahlen eingeschlossenen Winkel zusammengesetzt sind.

Den Satz rechts hat ein französischer Mathematiker, *Brianchon*, zuerst bekannt gemacht, in einer schätzbaren Abhandlung über die Linien der zweiten Ordnung (*Mémoire sur les lignes du second ordre, p.* 7. *Paris* 1817.).

6. Ferner folgt aus dem obigen Gesetz (§. 4,) unmittelbar:

*α*) „Daſs das ganze System der einander entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde A, B bestimmt sei, sobald irgend drei Paare gegeben sind, d. h., wenn irgend drei Elementenpaare gegeben sind, so kann mittelst derselben zu jedem gegebenen vierten Element des einen Gebildes das entsprechende Element des anderen Gebildes gefunden werden, und die Gebilde lassen sich dadurch,

wenn sie sich in schiefer Lage befinden, in die ursprüngliche oder perspectivische Lage zurückbringen."

Diese Behauptung mag wie folgt noch näher erörtert werden.

I. Es seien z. B. die drei Elementenpaare a, b, c und a, b, c (Fig. 2.) gegeben, so kann daraus zu jedem beliebigen gegebenen vierten Strahl d des Strahlbüschels B der entsprechende Punkt d in der Geraden A, oder umgekehrt, zu diesem, wenn er gegeben ist, kann jener gefunden werden. Denn vermöge eines jeden der drei Ausdrücke (§. 4, II.), z. B. vermöge des Ausdruckes:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

ist im ersten Falle der Werth des Verhältnisses ad : bd, und im anderen Falle der Werth des Verhältnisses sin (ad) : sin (bd) durch die jedesmaligen übrigen drei Verhältnisse gegeben.

Nun kann, wenn das Verhältnifs ad : bd gegeben ist und die Punkte a, b fest sind, der gesuchte Punkt d offenbar nur in zwei Stellen dieser Bedingung genügen, und zwar sind diese in Bezug auf die zwei festen Punkte a, b dadurch unterschieden, dafs der Punkt d das eine Mal zwischen und das andere Mal jenseits denselben liegt. Von diesen zwei Lagen kann aber dem Punkte d jedesmal nur eine zukommen, und zwar wird durch die gegenseitige Lage der vier gegebenen Strahlen entschieden, welche von beiden es sei, denn je nachdem die einander zugeordneten Strahlenpaare a und b, c und d nacheinander oder abwechselnd sich folgen, findet auch bei den Punktenpaaren a und b, c und d Folge oder Abwechselung statt (§. 4.), wodurch dann jedesmal entschieden werden

kann, welche der zwei genannten Lagen dem Punkte d zukomme.

Ebenso kann, wenn der Punkt d gegeben und dagegen der Strahl d gesucht wird, der letztere dem gegebenen Verhältnisse sin (ad) : sin (bd) nur in zwei verschiedenen Lagen genügen, und durch die gegenseitige Lage der vier gegebenen Punkte a, b, c, d wird entschieden in welcher von beiden Lagen allein er dem gegebenen Punkte d entsprechen kann.

Späterhin werden sich sehr bequeme Mittel darbieten (§. 24, IV.), um das jedesmalige gesuchte Element schnell und sicher zu finden*).

II. Ferner wird die obige Behauptung ($\alpha$) durch folgende Betrachtung erwiesen, die zugleich Anleitung giebt, die Gebilde A, B aus der schiefen (Fig. 2.) in die perspectivische Lage (Fig. 1.) zurückzubringen.

Sind nämlich a, b, c (Fig. 5.) die drei gegebenen Punkte in der Geraden A, und betrachtet man von den drei gegebenen Strahlen a, b, c vorerst nur zwei, etwa a, b, so ist, wenn diese durch die festen Punkte a, b gehen und einen bestimmten Winkel (ab) einschliefsen sollen, der Ort des Scheitels B dieses Winkels auf zwei bestimmte gleiche Kreislinien a B b, a $B_1$ b beschränkt, die beide durch die zwei festen Punkte a, b gehen. Eben so ist, wenn man die zwei Strahlen a, c allein unter der Bedingung betrachtet, dafs sie durch die

---

*) Sollte über die zwiefache Lage des jedesmaligen gesuchten Elements blofs aus den in Zahlen gegebenen Werthen der Verhältnisse ad : bd, sin (ad) : sin (bd) entschieden werden, ohne Ansicht der Figur, so müfste man bei der Zusammensetzung der Verhältnisse in dem obigen Ausdrucke die Verschiedenheit der Lage der Elemente gegen einander durch die Zeichen + und — bemerklich machen, so würde alsdann das Vorzeichen der Verhältnisse ad : bd, sin (ad) : sin (bd) über das Zweifelhafte der Lage des gesuchten Elements entscheiden.

festen Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ gehen und einen gegebenen Winkel (ac) einschliefsen sollen, der Ort des Scheitels B dieses Winkels auf zwei bestimmte gleiche Kreislinien $\mathfrak{a}B\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}B_1\mathfrak{c}$ beschränkt, die durch die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ gehen. Daher lassen sich die Scheitel der beiden gegebenen Winkel (ab), (ac), wenn ihre Schenkel a, b, c durch die festen Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gehen sollen, nur in denjenigen beiden Punkten $B, B_1$ vereinigen, in welchen sich die auf einerlei Seite der Geraden A liegenden Ortskreise einander (aufser in $\mathfrak{a}$) zum zweiten Male schneiden.

Dadurch ist offenbar die Richtigkeit der obigen Behauptung ($\alpha$) dargethan. Denn befänden sich die beiden Gebilde B, A in beliebiger schiefer Lage, wie etwa in (Fig. 2.), so folgt aus dieser Betrachtung, dafs sie, sobald drei entsprechende Elementenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und a, b, c gegeben sind, nicht auf wesentlich verschiedene Arten in perspectivische Lage gedacht werden können, d. h., in solche Lage gedacht werden können, wo die drei gegebenen Strahlen durch die ihnen entsprechenden drei Punkte gehen. Nämlich wird z. B. die Lage der Geraden A als fest angenommen, etwa in (Fig. 5.); so kann wohl der Strahlbüschel auf beiden Seiten derselben entweder in die Lage von B oder in die Lage von $B_1$ gebracht werden, aber offenbar wird in beiden Fällen jeder beliebige vierte Strahl d des Strahlbüschels mit dem nämlichen Punkte $\mathfrak{d}$ der Geraden A zusammentreffen. Oder wird der Strahlbüschel B in irgend einer Lage als fest angenommen, etwa in (Fig. 6.), so kann wohl die Gerade entweder in die Lage von A oder in die Lage von $A_1$ gebracht werden, und zwar so, dafs A und $A_1$ parallel sind, und wo der Mittelpunkt B des Strahlbüschels in der Mitte zwischen ihnen liegt, aber offenbar wird in beiden Fällen jeder

beliebige vierte Punkt 𝔡 der Geraden mit dem nämlichen Strahl d des Strahlbüschels B zusammentreffen.

Aus der vorstehenden Betrachtung, so wie auch aus der obigen (I.), folgt ferner zugleich:

β) „Dafs man bei zwei beliebig liegenden Gebilden B, A ganz nach Willkühr drei Paar Elemente a und 𝔞, b und 𝔟, c und 𝔠 auswählen und sodann festsetzen könne, die Gebilde sollen projectivisch und diese Elementenpaare sollen entsprechende Elementenpaare sein."

Endlich folgt noch, durch Umkehrung, der nachstehende Satz.

γ) „Sind die Elemente a, b, c, d, ..... und 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, ..... zweier Gebilde B und A der Reihe nach folcher Gestalt gepaart, dafs je vier Elementenpaare dem obigen Gesetze (§. 4, II.) genügen, wobei nothwendiger Weise die jedesmaligen vier Elemente des einen Gebildes mit denen des anderen Gebildes übereinstimmende gegenseitige Lage haben müssen, so sind die Gebilde, in Beziehung auf alle jene Elementenpaare, projectivisch."

7. In Ansehung der obigen Ausdrücke (§. 4, II.), die das Gesetz darstellen, welchem bei zwei projectivischen Gebilden A, B im Allgemeinen je vier entsprechende Elementenpaare 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 und a, b, c, d unterworfen sind, können verschiedene besondere Fälle eintreten, die nämlich von eigenthümlicher Lage der jedesmaligen vier Elemente herrühren, von denen einige interessant genug sind, um hier näher erörtert zu werden.

Es können nämlich **erstens** solche Fälle eintreten, wo die in den genannten Ausdrücken enthaltenen Doppelverhältnisse vereinfacht werden, und zwar da-

durch, dafs in einem solchen Doppelverhältnifs zwei Glieder gleich werden und gegen einander gehoben werden können, oder dafs das Doppelverhältnifs, (wenn es sich auf die vier Strahlen a, b, c, d bezieht), auf sonstige Art auf ein einfaches Verhältnifs gebracht wird. Dahin gehören z. B. folgende Fälle:

Wenn von den vier Punkten in der Geraden A entweder a) einer in der Mitte zwischen zweien anderen liegt, oder b) wenn einer der unendlich entfernte Punkt der Geraden ist.

Wenn von den vier Strahlen des Strahlbüschels B entweder α) einer mit zwei anderen gleiche Winkel einschliefst, oder β) wenn zwei Strahlen zu einander rechtwinkelig sind.

I. Denn wenn a) etwa der Punkt $\mathfrak{d}$ (Fig. 1.) in der Mitte zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegt, so ist das Verhältnifs $\mathfrak{a}\mathfrak{d} : \mathfrak{b}\mathfrak{d} = 1$, und daher vereinfacht sich in diesem Falle in dem obigen Ausdrucke (§. 4, II, 8.) das Doppelverhältnifs links wie folgt:

$$1. \quad \mathfrak{a}\mathfrak{c} : \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \frac{\sin\,(ac)}{\sin\,(bc)} : \frac{\sin\,(ad)}{\sin\,(bd)}$$

Wenn ferner b) unter den vier Punkten sich der unendlich entfernte Punkt $\mathfrak{q}$ (§. 2.) der Geraden A befindet, wenn etwa die vier Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{q}$ gegeben sind, dann sind offenbar die Abstände des letzteren von den drei übrigen, nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{q}, \mathfrak{b}\mathfrak{q}, \mathfrak{c}\mathfrak{q}$, als einander gleich zu achten, da sie sämmtlich unendlich grofs, und nur durch die Abschnitte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ von einander unterschieden sind, so dafs also jedes der drei Verhältnisse $\mathfrak{a}\mathfrak{q} : \mathfrak{b}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{q} : \mathfrak{c}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{q} : \mathfrak{c}\mathfrak{q}$ schlechthin $= 1$ ist, und dafs folglich in diesem Falle die genannten Doppelverhältnisse (§. 4, II.), wenn man darin $\mathfrak{q}$ an die Stelle von $\mathfrak{d}$ setzt, sich wie folgt vereinfachen:

$$2. \begin{cases} \mathfrak{ac} : \mathfrak{bc} = \dfrac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \dfrac{\sin(aq)}{\sin(bq)}, \\ \mathfrak{ab} : \mathfrak{cb} = \dfrac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \dfrac{\sin(aq)}{\sin(cq)}, \\ \mathfrak{ab} : \mathfrak{ac} = \dfrac{\sin(ab)}{\sin(qb)} : \dfrac{\sin(ac)}{\sin(qc)}. \end{cases}$$

Durch jeden dieser letzteren drei Ausdrücke wird, wie man sieht, der Parallelstrahl q bestimmt, sobald irgend drei entsprechende Elementenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und a, b, c gegeben sind.

Wenn andererseits $\alpha$) etwa der Strahl d in der Mitte zwischen a und b liegt, so ist das Verhältnifs sin (ad) : sin (bd) = 1, und daher hat man für den Fall, wo c und d zugeordnete Strahlen sind (§. 4, 8.):

$$3. \quad \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \sin(ac) : \sin(bc).$$

Wenn ferner $\beta$) zwei Strahlen, etwa a und b, zu einander senkrecht sind, so ist sin (bc) = cos (ac), und sin (bd) = cos (ad), oder sin (ac) = cos (bc), und sin (ad) = cos (bd), und daher hat man, wenn a und b als zugeordnet angenommen werden (§. 4, 8.):

$$4. \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \dfrac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \mathrm{tg}(ac) : \mathrm{tg}(ad), \text{ oder} \\ \dfrac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \dfrac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \mathrm{tg}(bd) : \mathrm{tg}(bc) \end{cases}$$

II. Die vorstehenden Fälle geben, wie man bemerken wird, ein bequemes Mittel an die Hand, um den Werth eines gegebenen Doppelverhältnisses, sei dasselbe von vier Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, oder von vier Strahlen a, b, c, d abhängig, durch ein einfaches Verhältnifs darzustellen; oder auch umgekehrt, um beliebige Systeme von vier Punkten oder von vier Strahlen zu finden, denen ein Doppelverhältnifs zukommt, dessen Werth durch ein einfaches Verhältnifs gegeben ist.

Denn

Denn soll z. B. der Werth eines von den vier Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, oder von den vier Strahlen a, b, c, d (Fig. 3.) abhängigen Doppelverhältnisses durch ein einfaches Verhältnifs dargestellt werden, so kann dies, zufolge des Doppelsatzes in (§. 5.), wie folgt geschehen. Da nämlich einerseits die genannten vier Strahlen alle Geraden unter einerlei Doppelverhältnifs schneiden, so ist also nur nöthig eine Gerade $A_1$ so zu ziehen, dafs sie entweder:

a) die vier Strahlen so schneidet, dafs von den vier Durchschnittspunkten irgend einer in der Mitte zwischen zwei andern liegt (I, a.); dieser Bedingung kann die Gerade $A_1$ offenbar in 12 verschiedenen Richtungen genügen, weil nämlich der Durchschnitt jedes Strahls in der Mitte zwischen je zwei der drei übrigen Durchschnitten liegen kann, mithin giebt es 12 Systeme von parallelen Geraden, welche alle jene Bedingung erfüllen; oder

b) mit irgend einem der vier Strahlen parallel ist (I, b); dieser Bedingung kann also die Gerade $A_1$ in vier verschiedenen Richtungen genügen, oder es giebt vier Systeme von parallelen Geraden, welche alle diese Bedingung erfüllen; z. B. es sei die Gerade $A_1$ etwa mit dem Strahle c parallel, so werden also die Verhältnisse

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1 : \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1; \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1; \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1,$$

nach der Reihe, mit den Doppelverhältnissen in den obigen Ausdrücken (§. 4, II.) gleiche Werthe haben.

Und da andererseits jeden vier Strahlen eines Strahlbüschels, welche durch die vier festen Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gehen, Doppelverhältnisse von einerlei Werth zugehören, so ist, um der obigen Forderung zu genügen, nur nöthig den Mittelpunkt eines Strahlbüschels $B_1$ so anzunehmen, dafs entweder:

*α*) von den vier Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, welche durch jene festen Punkte gehen, irgend einer in der Mitte zwischen zwei anderen liegt (I, *α*.); unter dieser Bedingung ist der Ort des Mittelpunkts $B_1$, im Ganzen, auf 12 bestimmte Kreise beschränkt, deren Mittelpunkte sämmtlich in der festen Geraden A liegen, was nachher (§. 8, III.) bewiesen wird; oder

*β*) dafs von den vier Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ irgend zwei zu einander senkrecht sind (I, *β*); vermöge dieser Bedingung ist der Ort des Mittelpunkts $B_1$ offenbar auf diejenigen 6 Kreise beschränkt, welche die Abstände der vier festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ von einander, also die Strecken $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{bd}$ und $\mathfrak{cd}$, zu Durchmessern haben.

### Harmonische Elemente.

8. Es kann zweitens der besondere Fall eintreten, wo in den vorhin erwähnten Ausdrücken (§. 7.) der Werth eines Doppelverhältnisses = 1 wird.

I. Von den drei Ausdrücken (§. 4, II.) gestattet jedesmal nur einer die Annahme, dafs der Werth der darin enthaltenen Doppelverhältnisse = 1 werden könne, z. B. wenn sie sich auf (Fig. 1.) beziehen, so gestattet nur der Ausdruck (§. 4, 8.), in welchem die abwechselnden Punkte, so wie die abwechselnden Strahlen einander zugeordnet sind (§. 4, b.), diese Annahme; dafs die beiden übrigen Ausdrücke diese Annahme nicht erlauben, fällt beim blofsen Anblick der Figur in die Augen. Wird in der That bei jenem ersteren Ausdrucke eines der beiden Doppelverhältnisse = 1 angenommen, so ist nothwendiger Weise auch das andere = 1, so dafs man hat:

$$1.\quad \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{\sin\,(ac)}{\sin\,(bc)} : \frac{\sin\,(ad)}{\sin\,(bd)} = 1,$$

und daher zugleich:

$$2.\ \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}, \qquad 2.\ \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}, \text{ oder}$$

$$3.\ \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}, \qquad 3.\ \frac{\sin(ca)}{\sin(da)} = \frac{\sin(cb)}{\sin(db)},$$

woraus man sieht, wie die gegenseitige Lage der beiderseitigen vier Elemente in diesem Falle beschaffen ist, nämlich:

„In diesem Falle liegen die vier Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ so, dafs die Abstände zweier zugeordneten ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, oder $\mathfrak{d}, \mathfrak{c}$) von den zwei anderen gleiches Verhältnifs zu einander haben (proportional sind), d. h., dafs das Verhältnifs der Abstände eines Punktes von zwei zugeordneten Punkten, gleich ist dem in ähnlicher Beziehung genommenen Verhältnifs der Abstände des ihm zugeordneten (vierten) Punktes von jenen zwei Punkten."

„In diesem Falle liegen die vier Strahlen a, d, b, c so, dafs die Sinufse der Winkel, welche zwei zugeordnete (a, b, oder d, c) mit den zwei anderen einschliefsen gleiches Verhältnifs zu einander haben, d. h., dafs das Verhältnifs der Sinufse der Winkel, welche ein Strahl mit zwei zugeordneten Strahlen einschliefst, gleich ist dem in ähnlicher Beziehung genommenen Verhältnifs der Sinufse der Winkel, welche der vierte Strahl mit jenen zweien einschliefst."

Unter diesen Bedingungen heifsen die vier Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ „vier harmonische Punkte," und die vier Strahlen a, d, b, c „vier harmonische Strahlen."*) Ferner sollen in diesem Falle je zwei zugeordnete Punkte ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$) oder Strahlen (a und b, c und d) fortan „zugeordnete harmonische Punkte oder Strahlen" genannt werden.

Dafs die neben einander stehenden Gleichungen (2.) zugleich statt finden, kann hiernach mit Worten wie folgt ausgesprochen werden:

$\alpha$) „Wenn bei zwei projectivischen Gebil-

*) *Lahire* nennt in seinem *Traité des sections coniques* vier solche Strahlen *„harmonicales,"* und *Brianchon* nennt sie in seiner oben erwähnten Schrift *„faisceau harmonique."*

den A, B irgend vier Elemente des einen Gebildes harmonisch sind, so sind auch die ihnen entsprechenden vier Elemente des anderen Gebildes harmonisch."

Dieser Satz läfst nicht nur eine einfache Umkehrung zu, sondern es findet in dieser Hinsicht folgendes statt. Da nämlich die Lage von vier harmonischen Elementen so beschaffen ist, dafs durch je drei derselben, wofern angegeben ist, welche zwei davon einander zugeordnet sein sollen, offenbar das vierte unzweideutig bestimmt ist, z. B. wenn 𝔞, 𝔟, 𝔠 oder a, b, c gegeben, und zwar 𝔞 und 𝔟, oder a und b einander zugeordnet sind, so ist 𝔡 oder d genau bestimmt (§. 6, I.); und da ferner die projectivische Beziehung zweier Gebilde A, B durch irgend drei entsprechende Elementenpaare, die nach Willkühr angenommen werden dürfen, bestimmt ist (§. 6, *β*.): so werden also die Gebilde A, B, in Ansehung der beiderseitigen harmonischen Elemente 𝔞, 𝔡, 𝔟, 𝔠 und a, d, b, c, nicht nur auf eine Art, wenn etwa die gleichnamigen Elemente einander entsprechen, projectivisch sein können, sondern vielmehr in allen Fällen, wo irgend zwei zugeordnete harmonische Elemente des einen Gebildes irgend zwei zugeordneten harmonischen Elementen des anderen Gebildes entsprechend angenommen werden, also in 8 Fällen, weil nämlich unter dieser Bedingung die vier Strahlen den vier Punkten 𝔞, 𝔡, 𝔟, 𝔠 in folgenden 8 verschiedenen Rangordnungen entsprechen können:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a d b c | b d a c | d a c b | c a d b |
| a c b d | b c a d | d b c a | c b d a |

Demnach hat man den nachstehenden Satz:

*β*) „Sind in jedem von zwei Gebilden A, B irgend vier harmonische Elemente gegeben, und man läfst diese Elemente, nach irgend einer Ordnung genommen, einander paarweise

entsprechen, jedoch so, dafs irgend zwei zugeordnete harmonische Elemente des einen Gebildes auch zwei zugeordnete harmonische Elemente des anderen Gebildes entsprechen, welches auf acht verschiedene Arten statt finden kann, so sind die Gebilde, in Ansehung der jedesmaligen vier Elementenpaare, projectivisch."

II. Statt der obigen allgemeinen Sätze in (§. 5.), hat man im gegenwärtigen Falle, wo die jedesmaligen vier Elemente harmonisch sind, folgende Sätze (I, *α*.):

„Jede vier Strahlen, die von irgend einem Mittelpunkt aus durch vier feste harmonische Punkte a, d, b, c gehen, sind harmonisch." Oder:

„Vier harmonische Punkte bestimmen mit jedem anderen Punkte vier harmonische Strahlen"*).

„Jede vier Punkte, in welchen irgend eine Gerade von vier festen harmonischen Strahlen a, d, b, c geschnitten wird, sind harmonisch." Oder:

„Vier harmonische Strahlen schneiden jede Gerade in vier harmonischen Punkten" *).

III. In Betracht der gegenseitigen Lage, welche vier harmonische Elemente unter sich haben können, finden folgende Umstände statt.

Wenn vier harmonische Punkte a, d, b, c, von denen a und b, c und d einander zugeordnet sind, nach der Ordnung, wie (Fig. 3.) sie vorstellt, auf einander folgen, mufs nothwendig d näher bei b als bei a liegen (I, 2.), weil dies offenbar für c der Fall ist; und umgekehrt, wenn d näher bei b als bei a ist, so mufs c nothwendig allemal jenseits b liegen; oder wäre d näher bei a als bei b, so müfste nothwendiger Weise c dies-

*) Das Wesentliche der obigen Sätze hat *Carnot* in seinem *Essai sur la théorie des transversales* zuerst gegeben. Einen Theil davon haben schon die Griechen gekannt (*Pappus*, Collec. Mathem libr. VII, Propos. CXLV.)

seits $\mathfrak{a}$ liegen. Ebenso ist für die gegenwärtige Aufeinanderfolge der Punkte erforderlich, dafs $\mathfrak{b}$ näher bei $\mathfrak{d}$ als bei $\mathfrak{c}$ liegt. Da das Verhältnifs $\mathfrak{ac}:\mathfrak{bc}$ gleich $(\mathfrak{ab}+\mathfrak{bc})$ $:\mathfrak{bc} = 1 + \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{bc}}$, so sieht man, dafs, wenn man die zugeordneten harmonischen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ festhält, während man in Gedanken $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{b}$ fortrücken läfst, der Werth dieses Verhältnisses alsdann immermehr der 1 sich nähert, je weiter $\mathfrak{c}$ sich von $\mathfrak{b}$ entfernt, und dafs daher $\mathfrak{d}$ sich gleichzeitig immermehr der Mitte $\mathfrak{m}$ des festen Abstandes $\mathfrak{ab}$ nähert, weil das Verhältnifs $\mathfrak{ad}:\mathfrak{bd}$ stets jenem Verhältnifs gleich sein mufs. Läfst man endlich den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{q}$ der Geraden A an die Stelle von $\mathfrak{c}$ treten, so wird das genannte Verhältnifs $1 + \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{bq}}$, da $\mathfrak{bq}$ unendlich grofs ist, schlechthin $= 1$, und dann mufs nothwendiger Weise $\mathfrak{d}$ sich in der genannten Mitte $\mathfrak{m}$ befinden. Denkt man sich ferner die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ fest, und läfst jetzt $\mathfrak{c}$ je mehr und mehr dem $\mathfrak{b}$ sich näheren, so nähert sich offenbar auch $\mathfrak{d}$ dem $\mathfrak{b}$, und wenn endlich $\mathfrak{c}$ sich mit $\mathfrak{b}$ vereiniget, so vereiniget sich zugleich $\mathfrak{d}$ mit ihnen beiden. Gleicherweise können sich $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ immermehr dem anderen festen Punkte $\mathfrak{a}$ näheren, bis sie sich endlich gleichzeitig mit ihm vereinigen.

Andererseits folgt, dafs, wenn der Strahl d mit den zugeordneten harmonischen Strahlen a, b gleiche Winkel einschliefst, so dafs das Verhältnifs $\sin(ad):\sin(bd) = 1$, dann auch $\sin(ac):\sin(bc) = 1$ ist (I, 2.), und daher auch c mit a und b gleiche Winkel einschliefsen mufs, und dafs dann folglich d und c in diesem Falle zu einander rechtwinkelig sind (weil sie die Winkel zwischen a und b hälften). Ferner folgt hier ähnlicherweise, wie vorhin bei den vier harmonischen Punk-

ten, dafs, wenn a und b fest sind, während c sich dem b nähert, bis er endlich mit ihm zusammenfällt, dann gleichzeitig auch d sich mit ihnen beiden vereiniget; und dafs eben so c und d sich gleichzeitig mit dem anderen festen Strahle a vereinigen können.

Aus dieser Betrachtung fliefsen folgende Sätze:

$\alpha$) „Zu irgend zwei festen Punkten a, b einer Geraden A, giebt es unzählige Paare zugeordneter harmonischer Punkte d, c, und namentlich ist der in der Mitte zwischen a und b liegende Punkt m und der unendlich entfernte Punkt q der Geraden A ein solches Paar; und ferner ist in jedem der beiden Punkte a, b selbst ein solches Paar vereiniget."

$\alpha$) „Zu irgend zwei festen Strahlen a, b eines Strahlbüschels B, giebt es unzählige Paare zugeordneter harmonischer Strahlen d, c, und namentlich sind die zwei Strahlen, welche die von jenen Strahlen eingeschlossenen Winkel hälften, mithin zu einander senkrecht sind, ein solches Paar; und ferner ist mit jedem der Strahlen a, b ein solches Paar vereiniget."

$\beta$) „Zu irgend einem festen Punkt m einer Geraden A und zu dem unendlich entfernten Punkte q derselben, giebt es unzählige zugeordnete harmonische Punktenpaare, wie etwa a, b, und zwar sind je zwei solche Punkte gleich weit von jenem festen Punkte m entfernt, und umgekehrt, je zwei Punkte, welche gleich weit von jenem festen Punkte entfernt sind, sind ein solches Paar."

$\beta$) „Zu irgend zwei zu einander senkrechten und festen Strahlen, etwa c, d, eines ebenen Strahlbüschels B, giebt es unzählige zugeordnete harmonische Strahlenpaare, wie etwa a, b, und zwar sind je zwei solche Strahlen gleich weit von jedem der zwei festen Strahlen entfernt, und umgekehrt, je zwei Strahlen, deren Winkel von jenen zwei festen Strahlen gehälftet werden, sind ein solches Paar."

$\gamma$) „Liegt von vier harmonischen Punkten einer in der Mittte zwischen zwei einander zugeoreneten, so ist sein zugeordneter unendlich entfernt, und um-

$\gamma$) „Schliefst von vier harmonischen Strahlen einer mit zwei einander zugeord, neten gleiche Winkel ein, so thut sein zugeordneter ein Gleiches, und umge-

**gekehrt: ist von den vier Punkten einer unendlich entfernt, so liegt sein zugeordneter in der Mitte zwischen den zwei übrigen Punkten."**

**kehrt: sind zwei zugeordnete Strahlen zu einander senkrecht, so hälften sie die von den beiden anderen Strahlen eingeschlossenen Winkel."**

Die letzten Sätze ($\gamma$.), welche eigentlich schon in ($\alpha$.) und ($\beta$.) enthalten sind, sind deshalb nochmals deutlicher ausgesprochen worden, weil sie sich auf die einfachsten Fälle von vier harmonischen Elementen beziehen; Fälle, die öfter vorkommen und unter gewissen Umständen, wie leicht zu erachten, Bequemlichkeit und Vortheile gewähren. Solche einfache Fälle lassen sich, wenn beliebige vier harmonische Elemente gegeben sind, zufolge der obigen Sätze (II.), wie folgt, darstellen (vergl. §. 7, II.). Sind irgend vier feste harmonische Punkte a, d, b, c gegeben, und sollen vier Strahlen $a_1$, $d_1$, $b_1$, $c_1$, eines Strahlbüschels $B_1$ durch dieselben gelegt werden, welche sich in dem genannten einfachen Falle befinden, d. h., von welchen zwei zugeordnete zu einander senkrecht sind, oder was auf dasselbe hinausläuft ($\gamma$.), von denen einer mit zwei zugeordneten gleiche Winkel einschliefst, so ist unter diesen Bedingungen offenbar der Ort des Mittelpunkts $B_1$ des Strahlbüschels auf zwei bestimmte Kreise beschränkt, deren Durchmesser die Abstände ab, cd der zugeordneten festen harmonischen Punkte sind, und zwar ist der Mittelpunkt $B_1$ auf den ersten oder auf den letzten Kreis beschränkt, je nachdem die Strahlen $a_1$ und $b_1$, oder $c_1$ und $d_1$ zu einander senkrecht sind, oder mit den jedesmaligen anderen Strahlen gleiche Winkel einschliefsen. — Sind andererseits irgend vier feste harmonische Strahlen a, d, b, c gegeben, und soll man sie durch eine Gerade $A_1$ in vier Punkten schneiden, welche den genannten einfachen Fall darstellen,

so kann die Gerade $A_1$ dieser Bedingung offenbar in vier verschiedenen Richtungen genügen, denn ist sie mit einem der vier festen Strahlen parallel, also einer ihrer Durchschnitte unendlich entfernt, so liegt dessen zugeordneter in der Mitte zwischen den zwei übrigen; und umgekehrt, liegt ein Durchschnitt in der Mitte zwischen zwei einander zugeordneten, so ist sein zugeordneter unendlich entfernt ($\gamma$.) und mithin die Gerade $A_1$ dem entsprechenden Strahle parallel. Aus dieser Betrachtung zieht man folgende Sätze:

$\delta$) „Wenn durch beliebige vier feste harmonische Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ vier solche Strahlen eines Strahlbüschels $B_1$ gehen sollen, von denen das eine Paar zugeordnete die von dem anderen Paar eingeschlossenen Winkel hälften ($\gamma$.), so ist der Ort des Mittelpunktes $B_1$ des Strahlbüschels auf zwei bestimmte Kreise beschränkt, welche die Abstände $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{cd}$ der sich zugeordneten festen Punkte von einander zu Durchmessern haben"*).

$\delta$) „Wenn von beliebigen vier festen harmonischen Strahlen a, d, b, c, eine Gerade $A_1$ in vier solchen Punkten geschnitten werden soll, daſs von zwei zugeordneten Punkten der eine unendlich entfernt und der andere in der Mitte zwischen den zwei übrigen Punkten liegt, so muſs die Gerade $A_1$ mit irgend einem der vier festen Strahlen parallel sein, und umgekehrt, ist sie mit einem der letzteren parallel, so finden allemal jene Bedingungen statt."

Durch den letzteren Satz links ist die Richtigkeit der obigen Behauptung (§. 7, II, $\alpha$.) dargethan.

---

*) Aus diesem Satze lassen sich unmittelbar noch eine Reihe anderer Sätze herleiten, als z. B. nachfolgende:

„Wenn die Endpunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ der Grundlinie eines Dreiecks $\mathfrak{a}B\mathfrak{b}$ (Fig. 4.) fest sind, und wenn die Gerade d oder c, welche den Winkel an der Spitze oder dessen Nebenwinkel hälftet, stets durch einen dritten festen Punkt $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{c}$ der Grundlinie geht, so ist der Ort der Spitze B des Dreiecks ein bestimmter Kreis,

Wenn man also durch die Spitze eines beliebigen Dreiecks zwei Strahlen zieht, wovon der eine durch die Mitte der Grundlinie geht, und der andere mit der Grundlinie parallel ist, so sind dieselben zugeordnete harmonische Strahlen zu den zwei (anderen) Seiten des Dreicks.

IV. Das gemeinschaftliche Gesetz, dem alle Punktenpaare (𝔡, 𝔠) oder Strahlenpaare (d, c) unterworfen sind, welche in Bezug auf zwei feste Punkte 𝔞, 𝔟 oder Strahlen a, b (Fig. 1.) zugeordnete harmonische Punkte oder Strahlen sind, läfst sich folgendermafsen genauer bestimmen.

Aus den obigen Ausdrücken (I, 2.):

$$\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}; \quad \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)},$$

durch welche die harmonische Lage der jedesmaligen vier Elemente bedingt wird, folgt unmittelbar, wenn nämlich der Punkt 𝔪 in der Mitte zwischen 𝔞 und 𝔟 und der Strahl h in der Mitte zwischen a und b liegt:

---

welcher den Abstand 𝔡𝔠 des dritten festen Punktes 𝔡 oder 𝔠 von demjenigen Punkte 𝔠 oder 𝔡, der in Bezug auf die zwei genannten Endpunkte 𝔞, 𝔟, sein zugeordneter harmonischer Punkt ist, zum Durchmesser hat."

In diesem Falle, wo die Strahlen d, c die von den Strahlen a, b eingeschlossenen Winkel hälften, hat man bekanntlich:

$$B\mathfrak{a} : B\mathfrak{b} = \mathfrak{ad} : \mathfrak{bd} = \mathfrak{ac} : \mathfrak{bc},$$

und umgekehrt, wenn diese Verhältnisse gleich sind, so findet jene Voraussetzung statt. Daher folgt ferner der nachstehende bekannte Satz.

„Wenn die Endpunkte 𝔞, 𝔟 der Grundlinie eines Dreiecks 𝔞B𝔟 fest sind, und wenn das Verhältnifs B𝔞 : B𝔟 der beiden übrigen Seiten gegeben ist, so ist der Ort der Spitze B des Dreiecks ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der genannten Grundlinie liegt, und zwar sind die Endpunkte dieser Grundlinie zu den Endpunkten (𝔡, 𝔠) des in ihr liegenden Durchmessers des Kreises zugeordnete harmonische Punkte; und

$$\frac{am+md}{bm-md}=\frac{am+mc}{mc-bm};\quad \frac{\sin(ah+hd)}{\sin(bh-hd)}=\frac{\sin(ah+hc)}{\sin(ch-bh)},$$

und daraus folgt ferner durch bekannte Veränderungen:

$md \cdot mc = ma^2 = mb^2$; $tg(hd) \cdot tg(hc) = tg(ah)^2 = tg(bh)^2$,

das heifst:

„Bei irgend vier harmonischen Punkten a, d, b, c ist das Rechteck (md . mc) unter den Abständen zweier zugeordneten Punkte (d, c) von demjenigen Punkte (m), welcher in der Mitte zwischen den zwei übrigen Punkten (a, b) liegt, gleich dem Quadrat des halben Abstandes (ma, mb) der letzteren Punkte von einander."

„Bei vier harmonischen Strahlen a, d, b, c ist das Produkt (tg(hd) . tg(hc)) der Tangenten der Winkel, welche zwei zugeordnete Strahlen (d, c) mit dem Strahle (h) einschliefsen, der in der Mitte zwischen den zwei übrigen Strahlen (a, b) liegt, gleich der zweiten Potenz der Tangente des halben Winkels ((ha), (hb)), welchen die letzten Strahlen einschliefsen."

---

ferner: die zwei Geraden (d, c), welche die Winkel an der Spitze des Dreiecks hälften, gehen stets durch zwei feste Punkte, nämlich durch die Endpunkte (d, c) des genannten Durchmessers." Und umgekehrt:

„Nimmt man in einem Durchmesser c d eines Kreises irgend zwei Punkte a, b, die in Bezug auf dessen Endpunkte c, d, zugeordnete harmonische Punkte sind, so haben je zwei Gerade aB, bB, welche dieselben mit irgend einem Punkte B des Kreises verbinden, einerlei Verhältnifs, und zwar verhalten sie sich allemal wie die Abstände der angenommenen Punkte von dem einen oder dem anderen Endpunkte des Durchmessers, also wie ad : bd, oder wie ac : bc; und ferner: die zwei Geraden Bd, Bc, welche den jedesmaligen Punkt B im Kreise mit den Endpunkten des genannten Durchmessers verbinden, hälften die von jenen ersten zwei Geraden eingeschlossenen Winkel."

Es liefsen sich hier leicht noch mancherlei Folgerungen über harmonische Punkte und harmonische Gerade in Beziehung auf den Kreis anschliefsen, allein da sich dieselben Eigenschaften in der Folge für alle Kegelschnitte zugleich beweisen lassen, so ist es zweckmäfsig, sie bis dahin zu verschieben.

Oder:

„Für alle Punktenpaare, die in Bezug auf zwei feste Punkte (a, b) zugeordnete harmonische Punkte sind, ist 1) das Rechteck unter ihren Abständen von demjenigen Punkte m, welcher in der Mitte zwischen den festen Punkten liegt, von beständiger Gröſse, und zwar gleich dem Quadrat des halben Abstandes der festen Punkte von einander; und 2) je zwei solche Punkte liegen jedesmal auf einerlei Seite des genannten Punktes m; und umgekehrt: jede zwei Punkte, welche diesen beiden Bedingungen zugleich genügen, sind zugeordnete harmonische Punkte in Bezug auf die genannten zwei festen Punkte."

„Für alle Strahlenpaare, die in Bezug auf zwei feste Strahlen (a, b) zugeordnete harmonische Strahlen sind, ist 1) das Produkt der Tangenten der Winkel, die sie mit dem Strahle h einschlieſsen, der in der Mitte zwischen den festen Strahlen liegt, von beständiger Gröſse, und zwar gleich der zweiten Potenz der Tangente des halben Winkels, welchen die festen Strahlen einschlieſsen; und 2) beide Strahlen liegen jedesmal auf einerlei Seite des genannten Strahles h; und umgekehrt: jede zwei Strahlen, welche diesen beiden Bedingungen zugleich genügen, sind zugeordnete harmonische Strahlen in Bezug auf die genannten zwei festen Strahlen."

## Zwei und mehrere Gerade, und zwei und mehrere ebene Strahlbüschel.

9. Der Gegenstand der bisherigen Betrachtung betraf bloſs die zwei Gebilde B, A, nämlich einen ebenen Strahlbüschel B und eine Gerade A, die sich in solcher Beziehung entgegengesetzt waren, daſs ihre Elemente einander auf bestimmte Weise entsprachen, und dadurch einem bestimmten Gesetze unterworfen waren, und wobei die Gebilde projectivisch genannt wurden. Die weitere Betrachtung wird sich nun auf die Untersuchung der gegenseitigen Beziehung ausdehnen, welche einerseits zwischen zwei Geraden, die mit demselben Strahlbüschel projectivisch sind, und andererseits

seits zwischen zwei Strahlbüscheln die mit derselben Geraden projectivisch sind, und welche ferner zwischen mehreren Gebilden, Geraden und Strahlbüscheln, die unter einander projectivisch sind, statt finden.

I. Sind zwei Gerade A, $A_1$ (Fig. 8.) mit einem und demselben Strahlbüschel B projectivisch, so dafs also bestimmte Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$ in der Geraden A und bestimmte Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \ldots$ in der Geraden $A_1$ auf bestimmte Weise (§. 2.) unter einem bestimmten Gesetze (§. 4.) den Strahlen a, b, c, d, ..... des Strahlbüschels B entsprechen, so sollen je zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ u. s. w. der Geraden, welche denselben Strahl des Strahlbüschels entsprechen, ebenfalls „entsprechende Punkte" heifsen, und die Geraden sollen, in Bezug auf das ganze System ihrer entsprechenden Punktenpaare, fortan „projectivisch" genannt werden. Und wenn die projectivischen Geraden A, $A_1$ solche besondere Lage haben, dafs beide zugleich mit dem Strahlbüschel B perspectivisch sind (§. 2.), dafs nämlich jeder Strahl des Strahlbüschels durch die ihm entsprechenden Punkte beider Geraden geht, wie etwa in (Fig. 7.), dann sollen die Geraden ebenfalls „perspectivisch" genannt werden, und dann heifst der Punkt B „Projectionspunkt." Jede andere Lage der Geraden, die nicht perspectivisch ist, soll „schiefe Lage" heifsen. Ferner sollen sowohl bei der schiefen, als bei der perspectivischen Lage der Geraden A, $A_1$, die Strahlen a, b, c, ..... oder diejenigen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, ....., die durch entsprechende Punkte gehen, „Projectionsstrahlen" genannt werden. Bei der perspectivischen Lage der Geraden A, $A_1$ (Fig. 7.) gehen also alle Projectionsstrahlen durch einen bestimmten Punkt, durch den Projectionspunkt B, und bilden das genannte Strahl-

büschel B, bei der schiefen Lage dagegen (Fig. 9.), treffen sie nicht in einem Punkte zusammen, sondern sie sind einem anderen sehr merkwürdigen Gesetze unterworfen, welches im dritten Kapitel näher untersucht werden wird.

Bei zwei projectivischen Geraden A, $A_1$ ist ferner die Eigenthümlichkeit der Parallelstrahlen in Erwähnung zu bringen. Befinden sich z. B. die Geraden mit dem Strahlbüschel B, und also auch unter sich, in perspectivischer Lage (Fig. 7.), und sind q, r diejenigen Strahlen, die mit den Geraden parallel sind, also die Parallelstrahlen (§. 2.), so entspricht mithin der Punkt $q_1$ in der Geraden $A_1$ dem unendlich entfernten Punkte q der Geraden A, und es entspricht der Punkt r in der Geraden A dem unendlich entfernten Punkte $r_1$ der Geraden $A_1$. Die zwei Punkte $q_1$, r sollen fortan „die Durchschnitte der Parallelstrahlen" genannt werden. Es ist klar, dafs, wenn auch die Geraden A, $A_1$ in schiefe Lage gebracht werden (Fig. 9.), dann die Projectionsstrahlen p, r oder $q_1q$, $rr_1$ immerhin mit ihnen parallel bleiben (§. 2.), wefshalb letztere alsdann immer noch Parallelstrahlen heifsen sollen.

Endlich ist noch zu bemerken, dafs, wenn die Geraden A, $A_1$ perspectivisch sind (Fig. 7.), dann in ihrem Durchschnittspunkte ($ee_1$) zwei entsprechende Punkte e, $e_1$ vereinigt sind, indem nämlich der Projectionsstrahl e offenbar beide Geraden zugleich in jenem Punkte schneidet.

II. Sind zwei Strahlbüschel B, $B_1$ (Fig. 11.) mit einer und derselben Geraden A projectivisch, so dafs also bestimmte Strahlen a, b, c, d, .... des Strahlbüschels B, und bestimmte Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, .... des Strahlbüschels $B_1$ der Reihe nach bestimmten Punkten a, b, c, d, .... der Geraden A, auf die oben (§. 2.)

festgesetzte Weise, entsprechen, so sollen die Strahlenpaare a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, u. s. w. der Strahlbüschel, welche demselben Punkte der Geraden A entsprechen, ebenfalls „entsprechende Strahlen" heifsen, und die Strahlbüschel selbst sollen, in Beziehung auf das ganze System ihrer entsprechenden Strahlenpaare, fortan „projectivisch" genannt werden. Und wenn zwei projectivische Strahlbüschel B, $B_1$ solche besondere Lage haben, dafs beide zugleich mit der Geraden A perspectivisch sind, dafs nämlich in jedem Punkt der Geraden die zwei ihm entsprechenden Strahlen einander schneiden, wie etwa in (Fig. 10.), oder auch in (Fig. 5.), dann sollen die Strahlbüschel ebenfalls „perspectivisch" heifsen, und dann soll die Gerade A ihr „perspectivischer Durchschnitt" genannt werden. Jede andere Lage der Strahlbüschel B, $B_1$, wo diese nicht perspectivisch sind, soll „schiefe Lage" heifsen.

Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ giebt es, im Allgemeinen, unter der unzähligen Menge entsprechender Strahlenpaare, zwei bestimmte Paare, die sich vor allen übrigen auf eigenthümliche Weise auszeichnen, nämlich dadurch, dafs sowohl die zwei Strahlen des einen als die des anderen Strahlbüschels zu einander rechtwinklig sind. Befinden sich z. B. die Strahlbüschel in perspectivischer Lage (Fig. 10.), so ist im Allgemeinen nur ein einziger Kreis unter den Bedingungen möglich, dafs er durch die Mittelpunkte B, $B_1$ beider Strahlbüschel gehe, und dafs sein Mittelpunkt m in dem perspectivischen Durchschnitt A liege. Sind s, t die Durchschnitte dieses Kreises m und der Geraden A, so besitzen offenbar die zwei Strahlenpaare s und $s_1$, t und $t_1$, die jenen zwei Punkten entsprechen, die vorerwähnte Eigenthümlichkeit, da nämlich sowohl s und t,

als $s_1$ und $t_1$ rechte Winkel ($\mathfrak{s}$Bt, $\mathfrak{s}B_1$t, Winkel im Halbkreise) einschliefsen, und es folgt ferner, dafs diesen zwei Strahlenpaaren nur allein die genannte Eigenthümlichkeit zukomme. Da diese Eigenschaft nicht von der Lage der Strahlbüschel abhängig ist, so findet das Nämliche statt, wenn sich die letzteren in schiefer Lage befinden (Fig. 11.). Die zwei Strahlenpaare s, t und $s_1$, $t_1$, sollen fortan „die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel" heifsen.

Noch mag bemerkt werden, dafs wenn zwei Strahlbüschel B, $B_1$ perspectivisch sind (Fig. 10.), dann allemal zwei entsprechende Strahlen e, $e_1$ aufeinander fallen, nämlich dieser vereinigte, oder gemeinschaftliche, Strahl ($ee_1$) ist derjenige, welcher durch die Mittelpunkte B, $B_1$ der Strahlbüschel geht.

**10.** Bei projectivischen Geraden und bei projectivischen Strahlbüscheln kann zunächst nach den Gesetzen gefragt werden, welchen ihre entsprechenden Elementenpaare unterworfen sind.

Da zwei projectivische Gerade A, $A_1$, zufolge der obigen Erklärung (§. 9, I.), mit einem und demselben Strahlbüschel B projectivisch sind, so folgt vermöge (§. 4, oder §. 6.) sogleich, dafs zwischen irgend vier entsprechenden Punktenpaaren beider Geraden ein bestimmtes Gesetz statt finden müsse. Denn sind a, b, c, d irgend vier Strahlen des Strahlbüschels B, und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ die ihnen entsprechenden Punkte in den Geraden A und $A_1$, so sind gewisse, von jenen Strahlen abhängige Doppelverhältnisse, sowohl gleich bestimmten Doppelverhältnissen die von den vier ersteren Punkten, als auch gleich bestimmten Doppelverhältnissen die von den vier letzteren Punkten abhängen, folglich müssen auch die letzteren Doppel-

ver-

verhältnisse gleich jenen sein, die sich auf die vier ersteren Punkte beziehen, und folglich hat man (§. 4, II.):

$$\text{I.}\begin{cases} 1.\quad \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} = \dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} : \dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1}, \\ 2.\quad \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} : \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1} : \dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1}, \\ 3.\quad \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} : \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}\mathfrak{c}} = \dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1} : \dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1}. \end{cases}$$

Da andererseits zwei projectivische Strahlbüschel $B$, $B_1$ mit einer und derselben Geraden $A$ projectivisch sind, so folgt ähnlicher Weise wie vorhin, daſs zwischen je vier entsprechenden Strahlenpaaren $a, b, c, d$ und $a_1, b_1, c_1, d_1$ beider Strahlbüschel ein bestimmtes Gesetz statt finden müsse, nämlich daſs folgende von diesen Strahlen abhängige Doppelverhältnisse gleich sind (§. 4, II.):

$$\text{II.}\begin{cases} 4.\quad \dfrac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \dfrac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \dfrac{\sin(a_1c_1)}{\sin(b_1c_1)} : \dfrac{\sin(a_1d_1)}{\sin(b_1d_1)}, \\ 5.\quad \dfrac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \dfrac{\sin(ad)}{\sin(cd)} = \dfrac{\sin(a_1b_1)}{\sin(c_1b_1)} : \dfrac{\sin(a_1d_1)}{\sin(c_1d_1)}, \\ 6.\quad \dfrac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \dfrac{\sin(ac)}{\sin(dc)} = \dfrac{\sin(a_1b_1)}{\sin(d_1b_1)} : \dfrac{\sin(a_1c_1)}{\sin(d_1c_1)}. \end{cases}$$

Diese Gesetze (I, II.) lassen sich, wie folgt, mit Worten aussprechen:

α) „Bei zwei projectivischen Geraden $A, A_1$ haben jede vier entsprechende Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, solche gemeinschaftliche Beziehung zu einander, daſs die drei Doppelverhältnisse, die aus den gegenseitigen Abständen der vier Punkte in der einen Geraden zu-

α) „Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln $B, B_1$ haben jede vier entsprechende Strahlenpaare $a$ und $a_1$, $b$ und $b_1$, $c$ und $c_1$, $d$ und $d_1$ solche gemeinschaftliche Beziehung zu einander, daſs die drei Doppelverhältnisse, die aus den Sinuſsen der Winkel zwischen den vier Strahlen des einen

sammengesetzt sind, gleich sind den drei Doppelverhältnissen, die sich aus den gegenseitigen Abständen der vier Punkte in der anderen Geraden zusammensetzen lassen."

Strahlbüschels zusammengesetzt sind, gleich sind den drei Doppelverhältnissen, die sich aus den Sinufsen der Winkel zwischen den vier Strahlen des anderen Strahlbüschels zusammensetzen lassen."

Es ist wesentlich zu bemerken, dafs bei den drei Ausdrücken (I.) die vier Punkte in der einen Geraden auf entsprechende Weise einander zugeordnet (§. 4.) sind, wie die vier Punkte in der anderen Geraden, und dafs ferner die gegenseitige Lage der einander zugeordneten Punktenpaare ebenfalls in beiden Geraden übereinstimmend ist, nämlich in dem Ausdrucke (1.), bezogen auf (Fig. 7, oder 8.), folgen die zugeordneten Punktenpaare ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{d}_1$), sowohl in der einen als in der andern Geraden abwechselnd aufeinander (§. 4, 6.), und in den Ausdrücken (2, 3.) folgen die zugeordneten Punktenpaare ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}_1$; oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$) sowohl in der einen als in der anderen Geraden nacheinander (§. 4, a.). Dafs diese Uebereinstimmung der gegenseitigen Lage der zugeordneten Punktenpaare in beiden Geraden immer statt finde, folgt daraus, dafs zwischen jeder Geraden und dem Strahlbüschel B, mit welchem beide projectivisch sind, eine ähnliche Uebereinstimmung obwaltet (Ende §. 4.), wodurch denn jene nothwendiger Weise bedingt wird.

Ganz ebenso wird man andererseits in den Ausdrücken (II.), in Hinsicht der Zusammenordnung und der gegenseitigen Lage der zugeordneten Strahlenpaare in den zwei Strahlbüscheln B, $B_1$, eine gleiche Uebereinstimmung wahrnehmen.

Vermöge dieser Uebereinstimmung und vermöge der obigen Ausdrücke (I, II.) selbst folgt also, dafs, wenn von den 8 Elementen, auf die sich einer dieser Ausdrücke bezieht, irgend 7 gegeben sind, dann das achte Element dadurch ganz unzweideutig bestimmt sei. Denn sind z. B. die 7 Punkte $a, b, c, d$; $a_1, b_1, c_1$ gegeben, so ist der Werth des Verhältnisses $a_1 d_1 : b_1 d_1$ durch die drei übrigen Verhältnisse eines der drei Ausdrücke (I.) gegeben, nun könnte aber der gesuchte Punkt $d_1$ diesem Werthe in zwei verschiedenen Lagen genügen, und zwar wobei er das eine Mal zwischen und das andere Mal jenseits der festen Punkte $a_1$, $b_1$ läge, allein da die gegenseitige Lage der vier Punkte $a_1, b_1, c_1, d_1$ mit der der vier Punkte $a, b, c, d$ übereinstimmend sein mufs, so wird dadurch entschieden, welche von den zwei Lagen dem Punkte $d_1$ nur allein zukommen könne. Auf ganz ähnliche Weise folgt, dafs wenn andererseits von den 8 Strahlen, auf welche sich die Ausdrücke (II.) beziehen, irgend 7 gegeben sind, dann der achte genau bestimmt sei (vergl. §. 6.). Also folgen nachstehende Sätze:

β) „Das ganze System der entsprechenden Punktenpaare in zwei projectivischen Geraden A, $A_1$ ist bestimmt, wenn irgend drei Paare gegeben sind, d. h., sobald drei solche Paare gegeben sind, etwa $a, b, c$, und $a_1, b_1, c_1$, so ist zu jedem beliebigen vierten Punkt ($d$) in der einen Geraden (A) der ihm entsprechende Punkt, $d_1$ in der anderen Geraden, vermöge der Ausdrücke (I.), genau bestimmt."

β) „Das ganze System der entsprechenden Strahlenpaare in zwei projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ ist bestimmt, wenn irgend drei Paare gegeben sind, d. h., sobald drei solche Paare gegeben sind, etwa a, b, c und $a_1$, $b_1$, $c_1$, so ist zu jedem beliebigen vierten Strahl (d) des einen Strahlbüschels (B) der ihm entsprechende Strahl ($d_1$) des anderen Strahlbüschels, vermöge der Ausdrücke (II.), genau bestimmt."

Und zwar folgt (vergl. §. 6, *β*.):

*γ*) „Dafs man in zwei Geraden $A, A_1$ ganz nach Willkühr drei Punktenpaare, etwa $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ auswählen, und sodann festsetzen könne, die Geraden sollen projectivisch und diese drei Punktenpaare sollen entsprechende Punktenpaare sein."

*γ*) „Dafs man in zwei Strahlbüscheln $B, B_1$ ganz nach Willkühr drei Strahlenpaare, etwa $a$ und $a_1$, $b$ und $b_1$, $c$ und $c_1$, auswählen, und sodann festsetzen könne, die Strahlbüschel sollen projectivisch und diese drei Strahlenpaare sollen entsprechende Strahlenpaare sein."

Und ferner folgt durch Umkehrung:

*δ*) „Sind die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, .... und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1$, ... in zwei Geraden $A$ und $A_1$ der Reihe nach solcher Gestalt gepaart, dafs zwischen je vier Punktenpaaren die obigen Bedingungen statt finden, nämlich dafs sie dem Gesetze (I.) genügen und dafs die gegenseitige Lage der vier Punkte in der einen Geraden mit der der vier Punkte in der anderen Geraden übereinstimmend ist, so sind die Geraden, in Beziehung auf alle jene Punktenpaare, projectivisch."

*δ*) „Sind die Strahlen $a, b, c, d$,..... und $a_1, b_1, c_1, d_1$, .... zweier Strahlbüschel $B$ und $B_1$ der Reihe nach solcher Gestalt gepaart, dafs zwischen je vier Strahlenpaaren die obigen Bedingungen statt finden, nämlich dafs sie dem Gesetze (II.) genügen und dafs die gegenseitige Lage der vier Strahlen des einen Strahlbüschels mit der der vier Strahlen des anderen Strahlbüschels übereinstimmend ist, so sind die Geraden, in Beziehung auf alle jene Strahlenpaare, projectivisch."

**11.** Bevor die besonderen Fälle der so eben aufgestellten Sätze (§. 10.) untersucht werden, sollen diese nebst einigen früheren Sätzen erst kurz wiederholt, und noch einige erweiternde Folgerungen daraus gezogen werden, die sodann zusammen die Fundamentalsätze über projectivische Gerade und ebene Strahlbüschel ausmachen, und deshalb bei späteren Betrachtungen häufig Anwendung finden.

I. Die Sätze (§. 4, und §. 6.) und die vorhin aus ihnen gefolgerten Sätze (§. 10.) lassen sich, wie folgt, kurz zusammenfassen.

*α*) „Bei zwei projectivischen Gebilden — seien es eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel, oder zwei Gerade, oder zwei ebene Strahlbüschel — sind die Doppelverhältnisse, welche durch irgend vier Elemente des einen Gebildes bestimmt werden, gleich den Doppelverhältnissen, welche durch die vier entsprechenden Elemente des anderen Gebildes bestimmt werden; ferner ist die gegenseitige Lage der vier Elemente des einen Gebildes übereinstimmend mit der der vier Elemente des anderen Gebildes."

*β*) „Daher ist das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde bestimmt, wenn irgend drei solcher Paare gegeben sind."

*γ*) „Und zwar können solche drei Paare ganz nach Willkühr angenommen werden." Und umgekehrt (*α*):

*δ*) „Sind die Elemente zweier Gebilde dergestalt gepaart, dafs die durch irgend vier Elelente des einen Gebildes bestimmten Doppelverhältnisse gleich sind den durch die vier entsprechenden Elemente des anderen Gebildes bestimmten Doppelverhältnisse, wobei nothwendiger Weise die jedesmaligen beiderseitigen vier Elemente übereinstimmende gegenseitige Lage haben müssen, so sind die Gebilde, in Beziehung auf alle jene Elementenpaare, projectivisch."

II. Aus den vorstehenden Sätzen folgt unmittelbar der nachstehende umfassende Satz:

*α*) „Sind zwei Gebilde — Gerade oder ebene Strahlbüschel — mit einem dritten projectivisch, so sind sie es auch unter sich."

Dieser Satz umfafst nämlich nachstehende sechs Fälle, wovon die zwei ersten schon oben (§. 9.) als Erklärung projectivischer Geraden und projectivischer Strahlbüschel gegeben wurden.

*β*) „Sind zwei Gerade $A$, $A_1$ mit einem und demselben Strahlbüschel $B$ projectivisch, so sind sie es auch unter sich."

*γ*) „Sind eine Gerade $A$ und ein Strahlbüschel $B$ mit einer und derselben Geraden $A_1$ projectivisch, so sind sie es auch unter sich."

*δ*) „Sind zwei Gerade $A$, $A_1$ mit einer dritten Geraden $A_2$ projectivisch, so sind sie es auch unter sich."

*β*) „Sind zwei Strahlbüschel $B$, $B_1$ mit einer und derselben Geraden $A$ projectivisch, so sind sie es auch unter sich."

*γ*) „Sind ein Strahlbüschel $B$ und eine Gerade $A$ mit einem und demselben Strahlbüschel $B_1$ projectivisch, so sind sie es auch unter sich."

*δ*) „Sind zwei Strahlbüschel $B$, $B_1$ mit einem dritten Strahlbüschel $B_2$ projectivisch, so sind sie es auch unter sich."

III. Durch Wiederholung und Zusammensetzung der vorstehenden Sätze (II.) gelangt man unmittelbar zu dem nachfolgenden ausgedehnteren Satze.

„Ist bei irgend einer Anzahl n Gebilden — Gerade und ebene Strahlbüschel — in irgend einer bestimmten Ordnung genommen, der Reihe nach jedes Gebilde mit dem darauf folgenden projectivisch, so ist jedes mit jedem, also namentlich auch das erste mit dem letzten, projectivisch."

12. Was nun die vorhin erwähnten besonderen

Fälle anbetrifft (§. 11.), so sind davon zwei Arten zu unterscheiden, nämlich entweder sind bei beliebigen Gebilden solche Elementenpaare zu betrachten, für welche die Ausdrücke (§. 10, I, II.) wesentlich vereinfacht, oder es sind solche Gebilde zu betrachten, bei denen für je vier entsprechende Elementenpaare jene Ausdrücke vereinfacht werden.

Die besonderen Fälle der ersten Art entstehen dadurch, dafs durch die Eigenthümlichkeit der Elementenpaare entweder einzelne Verhältnisse in den genannten Ausdrücken = 1, oder dafs der Werth eines Doppelverhältnisses = 1 wird. Die wichtigsten Fälle der Art sind folgende.

I. Nimmt man bei zwei projectivischen Geraden $A, A_1$, anstatt der Punktenpaare $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, die zwei Punktenpaare $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$, die den Parallelstrahlen zugehören, wo nämlich $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}_1$ die unendlich entfernten Punkte der Geraden $A$, $A_1$, und wo $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ die sogenannten D u r c h s c h n i t t e d e r P a r a l l e l s t r a h l e n sind (§. 9, I.), so werden die Ausdrücke (§. 10, I.) zufolge (§. 7, I.), wie folgt vereinfacht:

$$1)\quad 1 : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{r}}{\mathfrak{b}\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1} : 1$$

$$2)\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{a}\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{b}_1} : 1$$

$$3)\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{r}\mathfrak{b}} : 1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$$

Aus dem ersteren Ausdrucke (1.), der bei späteren Betrachtungen durch zweckmäfsige Anwendung zu merkwürdigen Folgerungen führt, folgt:

*α*) $\mathfrak{b}\mathfrak{r} : \mathfrak{a}\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1$, oder

*β*) $\mathfrak{a}\mathfrak{r} \times \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{r} \times \mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1$.

Nimmt man andererseits bei zwei projectivischen Strahlbüscheln $B, B_1$, anstatt der Strahlenpaare $c$ und $c_1$,

d und $d_1$, die zwei rechtwinkligen entsprechenden Strahlenpaare s und $s_1$, t und $t_1$, d. h., die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, wo nämlich sowohl s und t, als $s_1$ und $t_1$ zu einander rechtwinklig sind (§. 9, II.), so werden die Ausdrücke (§. 10, II.) ebenfalls vereinfacht, und namentlich wird aus dem ersteren derselben (welcher wichtiger ist, als die beiden übrigen), wenn man bemerkt, dafs $\sin(90^0 \pm x) = \cos x$, also z. B. $\sin(at) = \cos(as)$:

$$4)\quad \frac{\sin(as)}{\sin(bs)} : \frac{\cos(as)}{\cos(bs)} = \frac{\cos(a_1 t_1)}{\cos(b_1 t_1)} : \frac{\sin(a_1 t_1)}{\sin(b_1 t_1)}$$

oder:

$$\gamma)\quad \mathrm{tg}(as) : \mathrm{tg}(bs) = \mathrm{tg}(b_1 t_1) : \mathrm{tg}(a_1 t_1), \text{ und}$$

$$\delta)\quad \mathrm{tg}(as) \,.\, \mathrm{tg}(a_1 t_1) = \mathrm{tg}.(bs) \,.\, \mathrm{tg}(b_1 t_1).$$

Eben so hat man:

$$\gamma_1)\quad \mathrm{tg}(at) : \mathrm{tg}(bt) = \mathrm{tg}(b_1 s_1) : \mathrm{tg}(a_1 s_1), \text{ und}$$

$$\delta_1)\quad \mathrm{tg}(at) \,.\, \mathrm{tg}(a_1 s_1) = \mathrm{tg}(bt) \,.\, \mathrm{tg}(b_1 s_1).$$

Die Ausdrücke ($\beta$, $\delta$, $\delta_1$) enthalten, mit Worten ausgesprochen, nachfolgende merkwürdige Sätze.

„Bei zwei projectivischen Geraden $A, A_1$ ist das Rechteck ($\mathfrak{a}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$) unter den Abständen irgend zweier entsprechenden Punkte ($\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; oder $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, ..$) von den Durchschnitten ($\mathfrak{r}, \mathfrak{q}_1$) der Parallelstrahlen unveränderlich, d. h., für alle Punktenpaare hat dieses Rechteck einerlei Inhalt."

„Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln $B, B_1$ ist das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln ($s, t_1$, oder $s_1, t$) der entsprechenden rechten Winkel einschliefsen, von unveränderlichem Werthe."

Wenn also bei zwei projectivischen Geraden $A, A_1$ die Durchschnitte ($\mathfrak{r}, \mathfrak{q}_1$) der Parallelstrahlen und aufserdem irgend ein Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ gegeben sind, so sind die Ausdrücke ($\alpha$, $\beta$.), durch welche zu irgend einem Punkte der einen Geraden, etwa zu dem Punkte $\mathfrak{b}$ in der Geraden A, der entsprechende Punkt

$\mathfrak{b}_1$ in der anderen Geraden $A_1$ bestimmt wird, sehr einfach und bequem. Nebstdem nämlich, dafs durch die genannten Ausdrücke über die Gröfse des Abstandes $(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{q}_1)$ des Punktes $\mathfrak{b}_1$ von dem Durchschnitte $\mathfrak{q}_1$ des Parallelstrahls entschieden wird, wird durch die Uebereinstimmung der gegenseitigen Lage der Punkte in beiden Geraden, die Lage des Punktes $\mathfrak{b}_1$ genau bestimmt, denn je nachdem die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten des Punktes $\mathfrak{r}$ liegen, befinden sich übereinstimmend die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Punktes $\mathfrak{q}_1$ (§. 10.). Wie leicht zu sehen, findet andererseits bei den zwei Strahlbüscheln B, $B_1$ in Rücksicht der Ausdrücke ($\gamma$, $\delta$), Aehnliches statt.

Es ist ferner leicht zu sehen, dafs umgekehrt, wenn in zwei projectivischen Geraden A, $A_1$ irgend drei entsprechende Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ gegeben sind, dann durch dieselben die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen bestimmt und mittelst der Ausdrücke (1, 2, 3) oder (§. 10, I.) zu finden sind; und dafs eben so, wenn in zwei projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ irgend drei entsprechende Strahlenpaare a, b, c, und $a_1$, $b_1$, $c_1$, gegeben sind, dann die Schenkel (s, t, $s_1$, $t_1$) der entsprechenden rechten Winkel (st), ($s_1 t_1$) vermöge der Ausdrücke (§. 10, II.) bestimmt und zu finden sind.

II. Von den Ausdrücken (§. 10, I, II.), auf (Fig. 7, 8 und 10, 11.) bezogen, gestatten, vermöge der gegenseitigen Lage der Elemente, nur zwei, nämlich nur die Ausdrücke (§. 10, 1, 4.), den besonderen Fall, dafs der Werth der darin enthaltenen Doppelverhältnisse $= 1$ wird, und da alsdann die beiderseitigen vier Elemente, auf die sich der jedesmalige Ausdruck bezieht, zugleich harmonisch sind (§. 8, I, $\alpha$.), so folgt also (was zum Theil schon in §. 8, II. ausgesprochen):

„Dafs bei zwei projectivischen Geraden A, $A_1$ irgend vier harmonischen Punkten in der einen Geraden auch vier harmonische Punkte in der anderen Geraden entsprechen."

„Dafs bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ irgend vier harmonischen Strahlen in dem einen Büschel auch vier harmonische Strahlen in dem anderen Büschel entsprechen."

Und umgekehrt (§. 8, I, $\beta$.):

„Sind in jeder von zwei Geraden A, $A_1$ irgend vier harmonische Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ gegeben, so kann man auf acht verschiedene Arten festsetzen, die Geraden sollen projectivisch und jene Punkte sollen entsprechende Punktenpaare sein, und zwar ist dazu nur erforderlich, dafs in jedem Falle irgend zwei zugeordnete harmonische Punkte der einen Geraden auch zwei zugeordneten harmonischen Punkten der anderen Geraden entsprechen."

„Sind in jedem von zwei Strahlbüscheln B, $B_1$ irgend vier harmonische Strahlen a, d, b, c und $a_1$, $d_1$, $b_1$, $c_1$ gegeben, so kann man auf acht verschiedene Arten festsetzen, die Strahlbüschel sollen projectivisch und jene Strahlen sollen entsprechende Strahlenpaare sein, und zwar ist dazu nur erforderlich, dafs in jedem Falle irgend zwei zugeordnete harmonische Strahlen des einen Strahlbüschels, auch zwei zugeordneten harmonischen Strahlen des anderen Strahlbüschels entsprechen."

13. Die besonderen Fälle der zweiten Art (§. 12.) bestehen darin, dafs bei den projectivischen Geraden A, $A_1$ entweder je zwei entsprechende Abschnitte gleiches Verhältnifs zu einander haben, oder einander gleich sind, und dafs bei den projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ je zwei entsprechende Winkel einander gleich sind. Von der Möglichkeit dieser Fälle kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Gebilde in perspectivischer Lage betrachtet, nämlich wie folgt.

I. a) Bei zwei perspectivischen Geraden A, $A_1$ können die besonderen Umstände eintreten, dafs entweder

$\alpha$) der Projectionspunkt B (§. 9.) unendlich entfernt liegt, so dafs die Projectionsstrahlen a, b, c, ..... sämmtlich parallel sind, wie z. B. (Fig. 12.), oder $\beta$) die Geraden $A, A_1$ können parallel sein, und der Projectionspunkt B entweder 1) zwischen, wie (Fig. 6.), oder 2) jenseits denselben liegen, wie (Fig. 13.). In jedem dieser Fälle findet offenbar die besondere Eigenschaft statt: „Dafs je zwei entsprechende Abschnitte der Geraden $A, A_1$ einerlei Verhältnifs haben," so dafs man also, statt des obigen Gesetzes (§. 10, I.), in diesem Falle z. B. hat:

$$1. \quad \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1} = \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1} = \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1} = \frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1} = \text{u. s. w.}$$

Zwei Gerade, denen diese besondere Eigenschaft zukommt, sollen fortan projectivisch „ähnlich" heifsen.

Aus dem Vorstehenden folgt unmittelbar:

„Dafs das ganze System der entsprechenden Punktenpaare zweier projectivisch ähnlicher Geraden $A, A_1$ bestimmt sei, wenn irgend zwei solche Paare gegeben sind." Und

„Dafs man nach Willkühr zwei solche Paare annehmen und sodann festsetzen könne, die Geraden sollen projectivisch ähnlich und jene Paare sollen entsprechende Punktenpaare sein."

Ferner folgt, mit Rücksicht auf das Gesetz (§. 10, I.):

„Dafs zwei projectivische Gerade $A, A_1$ allemal ähnlich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Abschnitte, welche durch drei Paar entsprechende Punkte, etwa $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$, bestimmt werden, gleiches Verhältnifs haben, d. h., wenn $\mathfrak{ab} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{ac} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{bc} : \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ ist." Und:

„Dafs zwei projectivische Gerade ähnlich sind und perspectivisch liegen, sobald irgend drei Projectionsstrahlen, etwa a, b, c, parallel sind."

Noch bleibt ein Umstand zu bemerken, der bei späteren Betrachtungen interessante Folgen nach sich zieht, nämlich dafs bei projectivisch ähnlichen Geraden A, $A_1$, jedem endlich entfernten Punkte der einen Geraden, ein eben solcher Punkt in der anderen Geraden entspricht. Denn in (Fig. 12.) findet offenbar gar kein Parallelstrahl q statt (§. 9, I.), und in (Fig. 6. und 13.) haben beide Geraden einen gemeinschaftlichen Parallelstrahl q. Daher folgt also nothwendiger Weise:

„Dafs bei zwei projectivisch ähnlichen Geraden ihre zwei unendlich entfernten Punkte ($\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$) entsprechende Punkte sind." Und umgekehrt:

„Dafs wenn bei zwei projectivischen Geraden ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende Punkte sind, so sind die Geraden ähnlich."

b) Wenn ferner bei zwei projectivischen Geraden A, $A_1$ entweder $\alpha$) die Projectionsstrahlen a, b, c, ..... parallel (Fig. 12.) und beide Gerade mit ihnen gleiche Winkel einschliefsen (so dafs $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}$), oder $\beta$) wenn die Geraden parallel und der Projectionspunkt B in der Mitte zwischen ihnen liegt (Fig. 6.), oder endlich $\gamma$) wenn sowohl die Geraden als die Projectionsstrahlen unter sich parallel sind (Fig. 14.): dann findet offenbar die besondere Eigenschaft statt: „Dafs je zwei entsprechende Abschnitte der Geraden A, $A_1$ einander gleich sind," so dafs man, statt des vorigen Gesetzes (a, 1.), in diesem Falle hat:

2. $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ u. s. w.

In dem gegenwärtigen Falle sollen deshalb die Geraden A, $A_1$ projectivisch „gleich" (congruent) heifsen.

Dieser Betrachtung zufolge ist also „bei zwei projectivisch gleichen Geraden das ganze System der entsprechenden Punktenpaare bestimmt, sobald ein einziges Paar gegeben ist."

Auch folgt, wie leicht zu sehen, „dafs zwei projectivische Gerade A, $A_1$ allemal gleich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Abschnitte derselben, welche durch drei entsprechende Punktenpaare, etwa $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$, bestimmt werden, einander gleich sind, d. h., wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, und $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ ist."

Endlich folgt (a): „Dafs bei zwei projectivisch gleichen Geraden ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende Punkte sind."

II. Zwei perspectivische Strahlbüschel B, $B_1$ können insbesondere so sein, dafs entweder $\alpha$) ihr perspectivischer Durchschnitt A (§. 9, II.) zu ihrem gemeinschaftlichen Strahle ($ee_1$) rechtwinklig und von den Mittelpunkten B, $B_1$ der Strahlbüschel gleich weit entfernt ist, wie etwa (Fig. 5.), so dafs je zwei entsprechende Strahlen gleiche Stücke von einander abschneiden, nämlich $B\mathfrak{a} = B_1\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b} = B_1\mathfrak{b}$; u. s. w., oder $\beta$) dafs je zwei entsprechende Strahlen parallel sind, welches nämlich dann eintreten würde, wenn man in Gedanken die Figur 10. sich so veränderen liefse, dafs während die Mittelpunkte B, $B_1$ der Strahlbüschel fest blieben, deren perspectivischer Durchschnitt A sich ins Unendliche entfernte, wodurch (Fig. 15.) entstände. In jedem dieser zwei Fälle findet offenbar die besondere Eigenthümlichkeit statt:

„Dafs je zwei entsprechende Winkel der zwei Strahlbüschel $B, B_1$ einander gleich sind;" so dafs man also, statt des obigen Gesetzes (§. 10, II.), nur die einfache Beziehung hat:

3. $(ab) = (a_1 b_1)$, $(ac) = (a_1 c_1)$, $(bc) = (b_1 c_1)$ u. s. w.

Zwei Strahlbüschel, denen diese besondere Eigenschaft zukommt, sollen projectivisch „gleich" heifsen.

Es folgt aus dieser Eigenschaft unmittelbar: „Dafs das ganze System der entsprechenden Strahlenpaare zweier projectivisch gleicher Strahlbüschel bestimmt sei, sobald ein einziges solches Paar, etwa $a, a_1$, gegeben ist." Jedoch sind dabei, in Hinsicht der Aufeinanderfolge der Strahlen, oder der Lage der Strahlbüschel, zwei Fälle zu unterscheiden. Nämlich man kann die Strahlen der Reihe nach in beiden Strahlbüscheln entweder in gleicher oder in umgekehrter Ordnung aufeinanderfolgend annehmen; d. h., man kann annehmen die Strahlen $a, d, b, c, \ldots\ldots$ und $a_1, d_1, b_1, c_1, \ldots\ldots$ folgen sich, von den Mittelpunkten der Strahlbüschel aus betrachtet, entweder 1) in beiden Strahlbüscheln rechtsherum, oder in beiden linksherum, wie z. B. (Fig. 15.), oder 2) in dem einen Strahlbüschel rechtsherum und in dem anderen linksherum, wie z. B. (Fig. 5.). Das Gesagte findet statt, die Strahlbüschel mögen sich in perspectivischer oder schiefer Lage befinden. Im Falle (1.) sollen die Strahlbüschel „gleichliegend" und im Falle (2.) sollen sie „ungleichliegend" heifsen. Wird der eine Strahlbüschel in Gedanken umgewandt, und wiederum zu dem anderen in dieselbe Ebene gelegt, so wird die Ordnungsfolge seiner Strahlen offenbar eine andere, so dafs, wenn die Strahlbüschel vorher gleichliegend waren, sie jetzt ungleichliegend sind, und auch umgekehrt. Dieser Unterschied der Lage zweier

projectivisch gleicher Strahlbüschel giebt sich weiter unten, bei der Erzeugung der Kegelschnitte, auf sehr auffallende Weise kund.

Es folgt ferner: „Dafs zwei projectivische Strahlbüschel $B, B_1$ allemal gleich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Winkel derselben, welche durch drei entsprechende Strahlenpaare bestimmt werden, gleich sind." Und:

„Dafs daher zwei projectivische Strahlbüschel gleich sind und perspectivisch liegen, sobald irgend drei entsprechende Strahlenpaare parallel sind."

Endlich mag noch bemerkt werden, dafs es bei zwei projectivisch gleichen Strahlbüscheln nicht nur ein Paar entsprechende rechte Winkel giebt (§. 9, II.), sondern dafs vielmehr jedem rechten Winkel des einen Strahlbüschels auch ein eben solcher im anderen entspricht.

### Von der gegenseitigen Lage der Gebilde und den durch sie bedingten Sätzen und Aufgaben.

14. Nachdem die allgemeinen und besonderen Gesetze, die zwischen den entsprechenden Elementenpaaren zweier projectivischer Geraden $A, A_1$ und zweier projectivischer Strahlbüschel $B, B_1$ statt finden, untersucht worden, sind nunmehr die Eigenschaften, welche von der gegenseitigen Lage der Gebilde herrühren, genau zu betrachten, und zwar sollen zunächst die Merkmale aufgesucht werden, woran man erkennt, ob zwei solche Gebilde sich in perspectivischer oder in schiefer Lage befinden.

Da bei zwei projectivischen Geraden $A, A_1$, wenn sie perspectivisch liegen, zwei entsprechende Punkte

($\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$) in ihrem Durchschnitte vereinigt sind (§. 9, I.), und da das ganze System ihrer entsprechenden Punktenpaare bestimmt ist, sobald irgend drei Paare gegeben sind (§. 10, $\beta$.): so folgt nothwendiger Weise, dafs sie sich allemal in perspectivischer Lage befinden werden, wenn entweder irgend zwei entsprechende Punkte in ihrem Durchschnitte vereinigt sind, oder wenn irgend drei Projectionsstrahlen in einem Punkte zusammentreffen. Sind z. B. die Geraden A, $A_1$ (Fig. 8.), in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \ldots\ldots$ projectivisch, und man denkt sich dieselben in solche Lage gebracht, dafs irgend zwei entsprechende Punkte, etwa $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, zusammenfallen (Fig. 7.), so müssen alle Projectionsstrahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1, \ldots\ldots$ durch einen und denselben Punkt gehen. Denn fände dieses nicht statt, so könnte man den Punkt B, in welchem irgend zwei Strahlen, etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, sich begegnen, als Mittelpunkt eines Strahlbüschels B annehmen, und dann würde letzterer die Geraden A, $A_1$ projectivisch schneiden (§. 9, I.), und zwar wären $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ drei entsprechende Punktenpaare; da aber durch drei Paar entsprechende Punkte das ganze System der entsprechenden Punktenpaare bestimmt ist (§. 10, $\beta$.), so mufs das neue System von entsprechenden Punktenpaaren mit dem gegebenen völlig übereinstimmen, und folglich mufs jeder Strahl c, d, ..... des Strahlbüschels B durch zwei gegebene entsprechende Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1, \ldots\ldots$ oder umgekehrt, jeder Strahl $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1, \ldots\ldots$, der ein Paar gegebene entsprechende Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1, \ldots\ldots$ verbindet, mufs durch den Punkt B gehen. Denkt man sich ferner die gegebenen Geraden A, $A_1$ (Fig. 8.) in solche Lage gebracht, dafs irgend drei Projectionsstrahlen, etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, einander in einem Punkte B treffen (Fig. 7.), so müssen alle übrigen

Pro-

Projectionsstrahlen $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$, ..... durch diesen nämlichen Punkt gehen. Denn nimmt man in der That den Punkt B als Mittelpunkt eines Strahlbüschels an, so schneidet derselbe die Geraden A, $A_1$ projectivisch, und zwar so, dafs $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ drei entsprechende Punktenpaare sind, allein da diese Punktenpaare auch zu dem gegebenen System von entsprechenden Punktenpaaren gehören, so sind die Geraden in beiden Fällen für die nämlichen Punktenpaare, projectivisch, und folglich geht jeder Strahl d, ..... des Strahlbüschels B durch zwei gegebene entsprechende Punkte $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, ..... der Geraden A, $A_1$, oder umgekehrt jeder Projectionsstrahl der Geraden geht durch jenen Punkt B, und folglich liegen die Geraden perspectivisch.

Da andererseits bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$, wenn sie perspectivisch liegen, zwei entsprechende Strahlen (e, $e_1$) zusammenfallen (§. 9, II.), und da das ganze System ihrer entsprechenden Strahlenpaare bestimmt ist, sobald irgend drei Paare gegeben sind (§. 10, $\beta$): so ist klar, dafs sie sich allemal in perspectivischer Lage befinden werden, wenn entweder irgend zwei entsprechende Strahlen aufeinander fallen, oder wenn die Durchschnitte von irgend drei entsprechenden Strahlenpaaren in einer und derselben Geraden liegen. Sind z. B. die Strahlbüschel B, $B_1$ (Fig. 11.), in Ansehung des Systems von entsprechenden Strahlen a, b, c, ..... und $a_1$, $b_1$, $c_1$, ..... projectivisch, und man denkt sich dieselben in solche Lage versetzt, dafs irgend zwei entsprechende Strahlen, etwa e und $e_1$, aufeinander fallen (Fig. 10.), so müssen jede zwei entsprechende Strahlen a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, ..... sich auf einer und derselben Geraden A schneiden. Denn legt man durch zwei solche Durchschnitte, etwa durch die Durchschnitte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Strahlenpaare a und $a_1$ b, und $b_1$,

eine Gerade A, so würden, wenn man für einen Augenblick, um die Mittelpunkte B, $B_1$, statt der gegebenen Strahlbüschel, sich andere denken wollte, welche die Gerade A zum perspectivischen Durchschnitt (§. 9, II.) hätten, dieselben von den gegebenen nicht verschieden sein können, weil sie mit ihnen die drei entsprechenden Strahlenpaare a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, wodurch das ganze System der entsprechenden Strahlenpaare bestimmt wird, gemein hätten, folglich schneiden sich je zwei entsprechende Strahlenpaare c und $c_1$, d und $d_1$, ..... der gegebenen Strahlbüschel auf der nämlichen Geraden A, und folglich liegen die Strahlbüschel perspectivisch. Wird ferner angenommen, die gegebe- Strahlbüschel B, $B_1$ (Fig. 11.) seien in solche Lage versetzt, dafs irgend drei entsprechende Strahlenpaare, etwa a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, sich auf einer Geraden A schneiden (Fig. 10.), so würden, eben so wie vorhin, wenn man sich um die Mittelpunkte B, $B_1$, aufser den gegebenen Strahlbüscheln, noch andere denken wollte, welche die Gerade A zum perspectivischen Durchschnitt hätten, dieselben nicht von den gegebenen verschieden sein können, weil sie mit ihnen die genannten drei entsprechenden Strahlenpaare gemein hätten, folglich müssen die gegebenen Strahlbüschel perspectivisch liegen, und die Gerade A zum perspectivischen Durchschnitt haben.

Demnach hat man nachstehende Sätze:

„Zwei projectivische Gerade A, $A_1$ befinden sich allemal in perspectivischer Lage, wenn entweder α) irgend zwei entsprechende Punkte in ihrem Durchscnitte vereinigt sind; oder β) wenn irgend

„Zwei projectivische Strahlbüschel B, $B_1$ befinden sich allemal in perspectivischer Lage, wenn entweder α) irgend zwei entsprechende Strahlen aufeinander fallen, oder β) wenn irgend drei ent-

drei Projectionsstrahlen in einem Punkte zusammentreffen." Und umgekehrt: „Wenn von diesen zwei Umständen ($\alpha$ oder $\beta$) der eine oder der andere entschieden nicht statt findet, so befinden sich die Geraden allemal in schiefer Lage."

sprechende Strahlenpaare sich auf einer Geraden schneiden." Und umgekehrt: „Wenn von diesen zwei Umständen ($\alpha$ oder $\beta$) der eine oder der andere entschieden nicht statt findet, so befinden sich die Strahlbüschel allemal in schiefer Lage."

Demnach können zwei projectivische Gerade, oder zwei projectivische Strahlbüschel auf unzählig viele verschiedene Arten in perspectivische Lage gebracht werden, indem man jede zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$,..... oder Strahlen a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, ...... vereinigen kann.

Insbesondere ist hierüber folgendes zu bemerken.

I. Für projectivisch ähnliche (oder gleiche) Geraden folgen aus dem obigen Satze nachstehende besondere Sätze:

„Zwei projectivisch ähnliche Gerade $A, A_1$ liegen allemal perspectivisch, wenn irgend zwei entsprechende Punkte ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, oder $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, ...., oder $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$) in ihrem gegenseitigen Durchschnitte vereinigt sind, und zwar a) wenn zwei endlich entfernte entsprechende Punkte vereinigt sind, wie z. B. $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ (Fig. 12.), so sind die Projectionsstrahlen a, b, c, .... sämmtlich parallel, so dafs der Projectionspunkt B unendlich entfernt liegt; und b) wenn die unendlich entfernten, einander entsprechenden (§. 13, I.) Punkte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ der Geraden vereinigt sind, d. h., wenn die Geraden parallel sind, dann treffen alle Projectionsstrahlen in einem endlich entfernten Punkte B zusammen, der entweder zwischen (Fig. 6.), oder jenseits (Fig. 13.)

4*

der Geraden liegt (sind die Geraden gleich, so liegt der Projectionspunkt B im ersten Falle in der Mitte zwischen ihnen (Fig. 6.), und im anderen Falle liegt er unendlich entfernt (Fig. 14.))."

Und ferner folgt:

„Findet sich, dafs bei zwei projectivischen Geraden irgend drei Projectionsstrahlen parallel sind, so schliefst man daraus, dafs die Geraden ähnlich (oder gleich) sind, und dafs sie perspectivisch liegen (§. 13, I, a.)."

II. Für Strahlbüschel folgt insbesondere:

„Dafs zwei projectivisch gleiche Strahlbüschel B, $B_1$ allemal perspectivisch liegen, wenn irgend zwei entsprechende Strahlen (a und $a_1$, b und $b_1$, .....) aufeinander fallen, und zwar dafs a) wenn sie gleichliegend sind (§. 13, II.), je zwei entsprechende Strahlen unter sich parallel, mithin ihr perspectivischer Durchschnitt A unendlich entfernt ist; oder b) wenn sie ungleichliegend sind, ihr perspectivischer Durchschnitt A auf ihrem gemeinschaftlichen Strahle $BB_1$ rechtwinklig steht und ihn hälftet (Fig. 5.)."

Und ferner:

„Findet sich, dafs bei zwei projectivischen Strahlbüscheln irgend drei Paar entsprechende Strahlen parallel sind, so folgt daraus, dafs die Strahlbüschel gleich, gleichliegend und perspectivisch sind (§. 13, II.)."

15. Ueber die perspectivische Lage zweier projectivischer Geraden oder zweier projectivischer Strahlbüschel ist noch folgendes zu bemerken.

Da sich zwei projectivische Gerade A, $A_1$ allemal in perspectivischer Lage befinden, sobald in ihrem

Durchschnitte irgend zwei entsprechende Punkte vereinigt sind (§. 14.), so hat folglich der von ihnen eingeschlossene Winkel auf diese Eigenschaft keinen Einfluſs. Hält man die eine Gerade, etwa A (Fig. 7.), fest, während man die andere $A_1$ um ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt ($e e_1$) herumbewegt, so jedoch, daſs die nämlichen zwei entsprechenden Punkte $e$ und $e_1$ stets vereinigt bleiben, so werden also die Geraden keinen Augenblick aufhören perspectivisch zu sein, allein ihr Projectionspunkt B wird offenbar gleichzeitig mit $A_1$ seinen Ort ändern, und es entsteht daher die Frage, in welcher Linie er sich bewegen werde?

Vermöge der Parallelstrahlen q, r ist diese Frage leicht zu beantworten. Denn da dieselben stets den Geraden A, $A_1$ parallel bleiben, und da ihre Durchschnitte $q_1$, $r$, der Voraussetzung gemäſs, ihre Abstände von dem Durchschnitte ($e e_1$) der Geraden, nicht ändern, so daſs die Abschnitte $q_1 e_1$, $r e$ der Gröſse nach unveränderlich sind, so bleiben folglich auch die beiden übrigen Seiten $rB$, $q_1 B$ des Parallelogramms $Br(e e_1) q_1$ der Gröſse nach unveränderlich, und da endlich der Punkt r, als in A liegend, fest bleibt, so muſs sich folglich der Projectionspunkt B in derjenigen Kreislinie bewegen, welche rB zum Halbmesser und r zum Mittelpunkt hat.

Da zwei projectivische Strahlbüschel B, $B_1$ in einer Ebene sich allemal in perspectivischer Lage befinden, sobald irgend zwei entsprechende Strahlen aufeinander fallen (§. 14.), so hat folglich der Abstand ($B B_1$) ihrer Mittelpunkte von einander auf diese Eigenschaft keinen Einfluſs. Hält man das eine Strahlbüschel, etwa B (Fig. 10.), fest, während man das andere $B_1$ ihm näher oder ferner rücken läſst, so jedoch, daſs stets die nämlichen zwei entsprechenden Strahlen e und $e_1$ ver-

einigt bleiben, so werden also die Strahlbüschel fortwährend perspectivisch sein, allein ihr perspectivischer Durchschnitt A mufs offenbar gleichzeitig mit dem Strahlbüschel $B_1$ seinen Ort ändern, und es entsteht daher die Frage, was das Eigenthümliche seiner Bewegung sei?

Diese Frage ist mittelst der Parallelstrahlen q, $q_1$ leicht zu beantworten. Denn da das Strahlbüschel $B_1$, der Voraussetzung gemäfs, sich ohne Drehung bewegt, so bewegt sich folglich jeder Strahl desselben sich selbst parallel, folglich bleiben die entsprechenden Strahlen q, $q_1$ stets parallel, sie sind folglich beständig die Parallelstrahlen, und folglich mufs sich auch der perspectivische Durchschnitt A sich selbst parallel bewegen, nämlich er mufs stets dem festen Strahle q parallel sein.

Demnach hat man nachstehende Sätze.

„Wenn von zwei perspectivischen Geraden A, $A_1$ die eine fest bleibt, während die andere sich um ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt dreht, ohne zu gleiten, so dafs stets dieselben zwei entsprechenden Punkte vereinigt bleiben, so bewegt sich der Projectionspunkt B in einer bestimmten Kreislinie, welche einen der beiden Durchschnitte ($q_1$ r) der Parallelstrahlen, nämlich denjenigen der in der festen Geraden liegt, zum Mittelpunkt hat."

„Wenn von zwei perspectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ das eine fest bleibt, während das andere sich so bewegt, dafs stets dieselben zwei entsprechenden Strahlen vereinigt bleiben, also ohne sich zu drehen, so bewegt sich der perspectivische Durchschnitt A sich selbst parallel, und zwar durch die ganze Ebene fort, d. h. er gelangt nach und nach in die Lage von jeder Geraden, welche mit der anfänglichen Geraden A parallel ist."

Es ist hiebei noch folgendes zu bemerken:

I. Bringt man, während die Gerade A immerhin

fest bleibt, die Gerade $A_1$ in andere Lage, so dafs nacheinander immer andere entsprechende Punkte in dem Durchschnitte der Geraden vereinigt werden, so erhält man andere Ortskreise, aber alle diese Ortskreise haben den Punkt r zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Ist der Projectionspunkt B in irgend einer bestimmten Lage gegeben, so kann die Gerade $A_1$ nur zwei verschiedene Lagen haben (§. 6, II.), wie z. B. in (Fig. 16.), wo $\mathfrak{A}_1$ die zweite Lage vorstellt. Die entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, die in beiden Fällen in dem Durchschnitte der Geraden vereinigt werden, sind so, dafs $\mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{r}\mathfrak{f}$ und (in $A_1$) $\mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1$, weil nämlich B in der Mitte zwischen $A_1$ und $\mathfrak{A}_1$ liegt (§. 6, II.). Daher folgt ferner: „Dafs jeder aus dem Mittelpunkt r beschriebene Kreis $\mathfrak{l}B\mathfrak{f}$ als Ortskreis angenommen werden könne, und dafs für denselben zwei verschiedene entsprechende Punktenpaare ($\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, oder $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$) in dem Durchschnitte der Geraden sich vereinigen lassen, und zwar sind diese Punkte jedesmal so, dafs die Durchschnitte ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$) der Parallelstrahlen in der Mitte zwischen denselben liegen."

Noch sind zwei entsprechende Punktenpaare zu erwähnen, die sich vor allen übrigen auf eigenthümliche Weise unterscheiden. Nach (§. 12, I.) ist nämlich das Rechteck unter den Abständen irgend zweier entsprechender Punkte von den Durchschnitten der Parallelstrahlen constant. Nun giebt es zwei solche Punktenpaare, bei welchen das genannte Rechteck ein Quadrat wird. Denn man denke sich ein Quadrat, dessen Inhalt dem constanten Inhalte aller Rechtecke gleich ist, und dessen Seite, auf der Geraden A, durch jeden der

zwei Abschnitte $\mathfrak{r}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{h}$ dargestellt sei, so müssen nothwendiger Weise auch $\mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$ Seiten desselben Quadrats, und also $\mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{h} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$, sein. Werden die Geraden A, $A_1$ so gelegt, dafs eins dieser Punktenpaare $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ sich in ihrem Durchschnitte befindet, wenn z. B. die Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ (Fig. 7.) eins dieser Paare vertreten, so ist das Paralleogramm $B\mathfrak{r}(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)\mathfrak{q}_1$ eine Raute, und der Strahl e hälftet den von den Geraden eingeschlossenen Winkel. Und auch umgekehrt.

II. Bringt man, während der Strahlbüschel B fest bleibt, den Strahlbüschel $B_1$ so in andere Lage, dafs nacheinander immer andere entsprechende Strahlen auf einander fallen, so erhält der perspectivische Durchschnitt A offenbar andere Richtung, und zwar wird er jede mögliche Richtung in der Ebene erhalten können. Denn wird der perspectivische Durchschnitt A in irgend einer bestimmten Lage angenommen, wie etwa in (Fig. 10.), so kann der Strahlbüschel $B_1$, zufolge (§. 6, II.), auf zwei verschiedene Arten so gelegt werden, dafs er mit ihm und mit dem festen Strahlbüschel B perspectivisch ist, und zwar werden das eine Mal zwei entsprechende Strahlen e, $e_1$, wie in der Figur, und das andere Mal irgend zwei andere entsprechende Strahlen, etwa f, $f_1$, aufeinander fallen. Stellt $\mathfrak{B}_1$ die zweite Lage des Mittelpunktes $B_1$ dar, so steht A auf dem Abschnitte $B_1\mathfrak{B}_1$ rechtwinklig und hälftet ihn (§. 14, II.), daher liegt $\mathfrak{B}_1$ ebenfalls in der Kreislinie $\mathfrak{t}BB_1\mathfrak{s}$, die $\mathfrak{m}$ zum Mittelpunkte hat, und daher werden die von den Strahlen e und f eingeschlossenen Winkel durch die Strahlen s und t hälftet; und eben so werden im Strahlbüschel $B_1$ die von den Strahlen $e_1$ und $f_1$ eingeschlossenen Winkel durch die Strahlen $s_1$ und $t_1$ hälftet. Daher folgt: „Dafs es für jede gegebene

Richtung des perspectivischen Durchschnittes (A) zwei entsprechende Strahlenpaare (e und $e_1$, oder f und $f_1$) giebt, wovon das eine oder das andere aufeinander fallen kann; und zwar liegen diese Strahlen so, dafs die von ihnen eingeschlossenen Winkel durch die Schenkel (s, t, $s_1$, $t_1$) der entsprechenden rechten Winkel gehälftet werden."

Aehnlicherweise, wie vorhin (I.), sind hier noch zwei entsprechende Strahlenpaare zu erwähnen, denen ein eigenthümliches Merkmal zukommt. Da nämlich das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliefsen, für alle Strahlenpaare einerlei Werth hat (§. 12, I.), so wird, wenn die eine Tangente die Quadratwurzel aus diesem Werthe ist, nothwendiger Weise die andere Tangente ihr gleich sein, und alsdann werden auch die zugehörigen Winkel einander gleich sein. Es sei z. B. (gt) (Fig. 17.) ein solcher Winkel, so wird er dem Winkel ($g_1 s_1$) gleich sein, und wenn er auf der anderen Seite an t liegt, d. h., wenn (ht) = (gt), so ist auch ($h_1 s_1$) = (ht), mithin (gt) = ($g_1 s_1$) = (ht) = ($h_1 s_1$). Dann ist folglich auch zugleich (gs) = ($g_1 t_1$) = (hs) = ($h_1 t_1$). Vermöge dieser Eigenschaft der entsprechenden Strahlenpaare g und $g_1$, h und $h_1$ folgt, dafs wenn die Strahlbüschel B, $B_1$ so gelegt werden, dafs die zwei Strahlen eines dieser zwei Strahlenpaare aufeinander fallen, so wird der perspectivische Durchschnitt A mit den vereinigten Strahlen (also mit $BB_1$) parallel. Und auch umgekehrt.

16. Bevor die Eigenschaften, die von der schiefen Lage projectivischer Geraden und projectivischer Strahlbüschel herrühren, untersucht werden, sollen erst be-

sondere Fälle, wobei weder das Merkmal der perspectivischen noch der schiefen Lage klar hervortritt, betrachtet werden, nämlich diejenigen Fälle, wo zwei projectivische Gerade aufeinander gelegt und wo die Mittelpunkte zweier projectivischer Strahlbüschel vereinigt werden. Diese Fälle sind von großer Wichtigkeit, und werden in einem späteren Hefte (im vierten) einer Reihe der interessantesten Resultate zur Grundlage dienen. In dem vorhergehenden (§. 15.) ist der ganze Spielraum in Hinsicht der perspectivischen Lage zweier Geraden und zweier Strahlbüschel gezeigt worden, nur die genannten Grenzfälle sind dabei unberücksichtigt geblieben.

Zunächst entsteht die Frage:

„Ob bei zwei beliebig aufeinander gelegten projectivischen Geraden $A, A_1$ entsprechende Punkte zusammenfallen, und wieviel Paare zusammenfallen?"

„Ob bei zwei beliebig aufeinander gelegten projectivischen Strahlbüscheln $B, B_1$ entsprechende Strahlen zusammenfallen, und wieviel Paare zusammen fallen?"

Es läfst sich zum Voraus behaupten, dafs weder bei den Geraden $A$, $A_1$, noch bei den Strahlbüscheln $B$, $B_1$ drei Paar entsprechende Elemente zusammenfallen können, weil durch drei solche Paare alle übrigen bestimmt sind (§. 11, $\beta$.), und folglich die Gebilde nothwendiger Weise gleich sein müfsten (§. 13, I, b.), so dafs alsdann je zwei entsprechende Elemente zusammen fielen. Also können im Allgemeinen nicht mehr als zwei Paar entsprechende Elemente zusammen fallen. Diese Behauptung bestätigt sich auf folgende Weise, wenn man von der perspectivischen Lage der Gebilde ausgeht, und sie in die hier zu untersuchenden Grenzfälle übergehen läfst.

I. Wird die Gerade $A_1$ (Fig. 16.), unter den oben angegebenen Bedingungen (§. 15.), so lange um den Durchschnitt ($\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$) bewegt, bis sie auf die feste Gerade A fällt, welches, wie man sieht, auf zwei Arten geschehen kann, entweder so, dafs $\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$ auf $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$, oder dafs $\mathfrak{e}_1\mathfrak{l}_1$ auf $\mathfrak{e}\mathfrak{l}$ fällt, so werden aufser den schon vereinigten entsprechenden Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, in jedem Falle nur ein einziges Paar entsprechende Punkte zusammen fallen, und zwar, wenn $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{l}$ die Punkte sind, in welchen der Ortskreis von B die Gerade A schneidet, so werden im ersten Falle nur die entsprechenden Punkte $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1$ und im anderen Falle nur die entsprechenden Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}_1$ zusammen fallen, weil offenbar nur jeder von den zwei Strahlen k, l mit den Geraden A, $A_1$ ein gleichschenkliges Dreieck, dessen gleiche Seiten in diesen Geraden liegen, bilden kann. Der Projectionspunkt B fällt also das eine Mal mit $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, und das andere Mal mit $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ zusammen. Daher folgt:

„Dafs, wenn zwei projectivische Gerade A, $A_1$ auf einander liegen, und wenn zwei Paar entsprechende Punkte ($\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, oder $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$) vereinigt sind, so sind sie als perspectivisch anzusehen, und zwar ist das eine Punktenpaar (welches man will) als Durchschnitt der Geraden und das andere als Projectionspunkt (B) anzusehen."

Wird andererseits das Strahlbüschel $B_1$, unter den oben angegebenen Bedingungen (§. 15.), so lange bewegt, bis sein Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des festen Strahlbüschels B sich vereinigt, so werden, ausser den schon anfänglich vereinigten entsprechenden Strahlen e, $e_1$, nur ein einziges Paar entsprechende Strahlen aufeinander fallen, nämlich, wie leicht zu sehen, nur die Parallelstrahlen q, $q_1$, und zwar verei-

nigt sich gleichzeitig auch der perspectivische Durchschnitt A mit diesem Strahlenpaare. Daher folgt:

„Dafs, wenn die Mittelpunkte zweier projectischen Strahlbüschel B, $B_1$ vereinigt sind, und wenn zwei Paar entsprechende Strahlen (e und $e_1$, q und $q_1$) aufeinander liegen, so sind sie als perspectivisch anzusehen, und zwar ist das eine Strahlenpaar (gleichviel welches), als der perspectivische Durchschnitt (A) zu betrachten."

II. Um die vorgelegte Aufgabe nach ihrem ganzen Umfange zu lösen, mag folgende Betrachtung dienen, die alle Umstände klar vor Augen stellt.

Bei zwei projectivischen Geraden A, $A_1$ findet in Hinsicht der Aufeinanderfolge ihrer entsprechenden Punkte folgende Beziehung statt.

Befinden sich die Geraden in perspectivischer Lage, wie etwa in (Fig. 16.), und man läfst in der Vorstellung einen Projectionsstrahl sich um den Projectionspunkt B bewegen, z. B. fängt man mit der Lage von h an und bewegt ihn linksherum, so dafs er nacheinander in die Lage von k, q, l, g, r, f, h gelangt, so sieht man, dafs von den zugehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_1$ der eine, in der Geraden A, sich von $\mathfrak{h}$ über $\mathfrak{k}$ hinaus nach dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{q}$ bewegt, von da auf der entgegengesetzten Seite über $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{e}$, bis $\mathfrak{r}$ rückt, und von da über $\mathfrak{f}$ endlich nach $\mathfrak{h}$ zurückkehrt — während der andere, in der Geraden $A_1$, sich von $\mathfrak{h}_1$ über $\mathfrak{k}_1$ bis $\mathfrak{q}_1$ bewegt, von da über $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{e}_1$ hinaus nach dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{r}_1$ fortrückt, und von da auf der entgegengesetzten Seite über $\mathfrak{f}_1$ endlich nach $\mathfrak{h}_1$ zurückkehrt. Sowohl der eine als der andere Punkt bewegt sich demnach stets nach der nämlichen Richtung hin; würde sich der erstere nach

der umgekehrten Richtung bewegen, so würde der andere ein Gleiches thun.

Werden nun die Geraden beliebig aufeinander gelegt, so können dabei nur folgende zwei wesentlich verschiedene Fälle statt finden, nämlich die Geraden sind in Hinsicht der Aufeinanderfolge der entsprechenden Punkte, oder in Hinsicht der Richtungen, nach welchen sich, wie man eben gesehen hat, die Punkte bewegen, entweder:

a) gleichliegend, d. h., ihre entsprechenden Punkte folgen einander nach einerlei Richtung hin, so dafs, wenn ein Punkt in der Geraden A sich von rechts nach links bewegt, dann sein entsprechender in der Geraden $A_1$ sich ebenfalls von rechts nach links bewegt, wie z. B. in (Fig. 19.), oder:

b) ungleichliegend, d. h., ihre entsprechenden Punkte folgen einander nach entgegengesetzten Richtungen hin, so dafs, wenn ein Punkt in A sich von rechts nach links bewegt, dann sein entsprechender in $A_1$ sich von links nach rechts bewegt, wie z. B. in (Fig. 18.).

Da die Geraden durch die Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ (Durchschnitte der Parallelstrahlen (§. 9, I.)), deren entsprechende $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}$ unendlich entfernt sind, jede in zwei unendliche Theile getheilt wird, welche einander paarweise entsprechen, nämlich sowohl die Theile $\mathfrak{r}\mathfrak{h}\mathfrak{f}\ldots\ldots\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1\mathfrak{h}_1\ldots\ldots\mathfrak{r}_1$, als $\mathfrak{r}\mathfrak{g}\mathfrak{l}\ldots\ldots\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{l}_1\mathfrak{g}_1\ldots\ldots\mathfrak{r}_1$ entsprechen einander und enthalten entsprechende Punkte, so dafs jedem Punkt im einen Theile ein Punkt im anderen Theile entspricht, so ist klar, dafs im Falle (b) längs der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ keine entsprechende Punkte zusammentreffen können, weil, wenn die mit $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ vereinigten Punkte etwa $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}$ heifsen, offenbar die den Punkten von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{m}$ entsprechenden Punkte jenseits $\mathfrak{m}_1$

liegen, und eben so die den Punkten von $\mathfrak{q}_1$ bis $\mathfrak{n}_1$ entsprechenden Punkte sämmtlich jenseits $\mathfrak{n}$ liegen. Daher können nur in den Strecken von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{n}$ und von $\mathfrak{q}_1$ bis $\mathfrak{m}_1$ entsprechende Punkte zusammen fallen. Dafs in der That in jeder dieser Strecken allemal ein, und nur ein Paar entsprechende Punkte sich treffen, ist leicht zu sehen, denn während z. B. ein Punkt in A von $\mathfrak{r}$ über $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}$..... hinaus, bis ins Unendliche fortrückt, kommt sein entsprechender in $A_1$ von da her über $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{f}_1$..... nach $\mathfrak{q}_1$, so dafs nothwendiger Weise beide Punkte irgend wo, etwa in ($\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$), sich begegnen müssen. Oder dasselbe ist auch eine leichte Folge des obigen Ausdruckes (§. 12, I. $\beta$.), wonach das Rechteck unter den Abständen zweier entsprechender Punkte von den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ einen beständigen Inhalt hat. Denn bestimmt man in beiden Strecken zwei Punkte, etwa $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, so, dafs die Rechtecke $\mathfrak{r}\mathfrak{e} . \mathfrak{q}_1\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{f} . \mathfrak{q}_1\mathfrak{f}$ den genannten constanten Inhalt haben, welches allemal, aber nur auf eine Art, möglich ist, so sind nothwendiger Weise $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ diejenigen beiden Punkte, welche allein sich mit ihren entsprechenden $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}_1$ vereinigen.

Im anderen Falle (a) sieht man, dafs weder in dem Theile $\mathfrak{r}\mathfrak{h}\mathfrak{f}$.....$\mathfrak{q}$ noch in dem Theile $\mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1\mathfrak{h}_1$.... $\mathfrak{r}_1$ entsprechende Punkte sich vereinigen können, weil eben diese zwei Theile entsprechend sind und entsprechende Punkte enthalten. Dagegen sind $\mathfrak{r}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{n}_1$ Abschnitte entsprechender Theile, so dafs also von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{q}_1$ möglicher Weise entsprechende Punkte sich treffen können. Diese Möglichkeit hängt davon ab, ob die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ so getheilt werden kann, dafs das Rechteck unter den Abschnitten einen bestimmten gegebenen Inhalt habe, nämlich wenn $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ die ihnen oben (§. 15, I.) beigelegte Eigenschaft haben, wo-

nach $\mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{h} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$, so ist der genannte Inhalt $= \mathfrak{r}\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1^2$ u. s. w. Wenn demnach die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ gröfser ist als $\mathfrak{r}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1$, oder $\mathfrak{r}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$, so treffen allemal zwei Paar entsprechende Punkte zusammen, wie vorhin; ist die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ gerade gleich $\mathfrak{r}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1$, oder gleich $\mathfrak{r}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$, so treffen nur ein Paar entsprechende Punkte zusammen, und zwar entweder die entsprechenden Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, oder $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$; und wenn endlich die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ kleiner ist als $\mathfrak{r}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1$, oder $2\mathfrak{r}\mathfrak{g}$, welches z. B. in (Fig. 18.) der Fall ist, so ist gar kein Zusammentreffen von entsprechenden Punkten möglich. Also kann, wenn die Gerade A fest bleibt, die Gerade $A_1$ um eine Strecke von $4\mathfrak{r}\mathfrak{g}$ hin und her bewegt werden, ohne dafs entsprechende Punkte zusammentreffen, nämlich die Grenzen dieses Spielraums gestatten, dafs sie sich nach links bewegen darf, bis $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, und nach rechts bis $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ zusammentreffen; in jeder dieser Grenzen trifft ein einziges Paar entsprechende Punkte zusammen, nämlich die eben genannten; werden aber diese Grenzen überschritten, so treffen immer zwei Paar zusammen.

Andererseits findet man bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ durch eine ähnliche Betrachtung ganz entsprechende Resultate. Werden die Strahlbüschel concentrisch gelegt, so können in Hinsicht der Aufeinanderfolge der entsprechenden Strahlen folgende zwei wesentlich verschiedene Fälle statt finden, nämlich die Strahlbüschel sind entweder:

*α*) gleichliegend, d. h., ihre entsprechenden Strahlen folgen einander nach einerlei Ordnung, so dafs, wenn man einen Strahl h des Strahlbüschels B sich rechtsherum bewegen läfst (vom Mittelpunkt B aus betrachtet), dann sein entsprechender

$h_1$ im Strahlbüschel $B_1$ sich ebenfalls rechtsherum bewegt (§. 13, II.), wie z. B. in (Fig. 20.); oder:

*β*) ungleichliegend, d. h., ihre entsprechenden Strahlen folgen in ungleicher oder verkehrter Ordnung aufeinander, so dafs, wenn Strahlen in einem Strahlbüschel rechtsherum sich folgen, dann ihre entsprechenden im anderen Strahlbüschel linksherum nach einander folgen, wie z. B. in (Fig. 21.) *).

Vermöge der entsprechenden rechten Winkel (st), ($s_1 t_1$) (§. 9, II.), und durch Hülfe der obigen Ausdrücke (§. 12, *γ*, *δ*.) und mit Rücksicht auf die besondere Eigenschaft der Strahlen g, $g_1$, h, $h_1$ (§. 15, II.), kann man, auf ähnliche Art, wie vorhin, bei den Geraden A, $A_1$, auch für die gegenwärtigen Fälle finden, dafs im Falle (*α*) entweder 1) zwei, oder 2) ein, oder 3) gar kein Paar entsprechende Strahlen aufeinander fallen, und dafs dagegen im Falle (*β*) allemal zwei Paar entsprechende Strahlen aufeinander fallen. Oder diese Resultate können auch aus den vorigen, wie folgt, hergeleitet werden. Schneidet man die concentrischen Strahlbüschel (Fig. 20.) oder (Fig. 21.) mit irgend einer Geraden, so kann man diese als zwei vereinigte Gerade ($AA_1$) ansehen, wovon jede eins der beiden Strahlbüschel schneidet, und die also, in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von entsprechenden Strahlen geschnitten werden, zufolge des Satzes (§. 11, III.), pro-

---

*) Befinden sich die Strahlbüschel in perspectivischer Lage, so sind sie gleichliegend, oder ungleichliegend, je nachdem ihre Mittelpunkte auf einerlei (Fig. 17.), oder auf entgegengesetzten (Fig. 5.) Seiten des perspectivischen Durchschnittes A liegen; und auch umgekehrt.

projectivisch sind, und zwar ist die Lage der Geraden und der Strahlbüschel allemal übereinstimmend, d. h., die Geraden ($AA_1$) sind bei (Fig. 20.) gleichliegend und bei (Fig. 21.) ungleichliegend, und da nun, wenn in den Geraden entsprechende Punkte zusammentreffen, nothwendiger Weise auch die zugehörigen Strahlen der Strahlbüschel aufeinander fallen, und auch umgekehrt, so folgen also daraus, wie gesagt, die genannten Resultate.

Also folgen aus dieser Betrachtung zusammengenommen nachstehende Sätze:

„Werden zwei projectivische Gerade $A$, $A_1$ beliebig aufeinander gelegt, so vereinigen sich im Allgemeinen zwei Paar entsprechende Punkte, nämlich: a) Wenn die Geraden gleichliegend sind, so giebt es einen bestimmten Spielraum innerhalb welchem keine entsprechende Punkte sich treffen, an beiden Grenzen dieses Raumes vereinigt sich nur ein Paar ($\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{h}_1$), und über diese Grenzen hinaus vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechende Punkte; und b) wenn die Geraden ungleichliegend sind, so treffen allemal zwei Paar entsprechende Punkte zusammen."

„Wenn zwei projectivische Strahlbüschel $B$, $B_1$ beliebig concentrisch gelegt werden, so fallen im Allgemeinen zwei Paar entsprechende Strahlen aufeinander, nämlich: a) Wenn die Stralbüschel gleichliegend sind, so giebt es einen bestimmten Spielraum, innerhalb welchem keine entsprechende Strahlen sich treffen, an beiden Grenzen dieses Raumes vereinigt sich nur ein Paar ($g$ und $g_1$, oder $h$ und $h_1$), und über diese Grenzen hinaus vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechende Strahlen; und b) wenn die Strahlbüschel ungleichliegend sind, so fallen allemal zwei Paar entsprechende Strahlen aufeinander."

III. Für ähnliche oder gleiche projectivische Gerade, und für gleiche projectivische Strahlbüschel werden die vorstehenden Sätze (II.) insbesondere wie folgt beschränkt.

„Werden zwei projectivisch ähnliche Gerade $A, A_1$ beliebig aufeinander gelegt, gleichliegend, oder ungleichliegend, so vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechende Punkte, wovon das eine Paar namentlich die unendlich entfernten Punkte sind (§. 13, I, a.)."

„Werden zwei projectivisch gleiche Gerade gleichliegend aufeinander gelegt, so treffen sich entweder nur ein Paar entsprechende Punkte, nämlich die unendlich entfernten, oder es treffen sich je zwei entsprechende Punkte."

„Werden zwei projectivisch gleiche Strahlbüschel $B, B_1$ gleichliegend concentrisch gelegt, so fallen entweder gar keine entsprechende Strahlen aufeinander, oder es fallen je zwei entsprechende Strahlen aufeinander."

„Werden zwei projectivisch gleiche Gerade ungleichliegend aufeinander gelegt, so treffen sich allemal zwei Paar entsprechende Punkte, wovon das eine Paar namentlich die unendlich entfernten Punkte sind (§. 13, I, b.)."

„Werden zwei projectivisch gleiche Strahlbüschel ungleichliegend aufeinander gelegt, so fallen allemal zwei Paar entsprechende Strahlen aufeinander, nämlich die Schenkel zweier entsprechender rechten Winkel (§. 13, II.)."

IV. Aus den obigen Sätzen (II.) folgert man leicht den nachstehenden Satz:

„Wenn zwei projectivische Gebilde A, B, d. h. eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel, sich in schiefer Lage befinden (Fig. 2.), so treffen im Allgemeinen zwei Paar entsprechende Elemente zusammen, d. h., so gehen zwei Strahlen des Strahlbüschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Geraden; nämlich wenn die Gebilde ungleichliegend sind, so findet dieses allemal statt; wenn sie dagegen gleichliegend sind, so treffen entweder 1) zwei,

**oder 2) nur ein, oder 3) gar kein Paar entsprechende Elemente zusammen."**

17. An die vorhin gefundenen Resultate (§. 16.) schliefsen sich nachstehende Aufgaben an, für welche eine zweckmäfsige Lösung um so wünschenswerther ist, da in der Folge verschiedene andere Aufgaben sich auf dieselben zurückbringen lassen.

„Bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Geraden $A$, $A_1$ die vereinigten entsprechenden Punkte zu finden."

„Bei zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln $B$, $B_1$ die vereinigten entsprechenden Strahlen zu finden."

Auflösung. I. Die bisher entwickelten Eigenschaften geben zur Lösung der Aufgaben folgende Mittel an die Hand.

a) Damit die projectivische Beziehung der Geraden $A$, $A_1$ bestimmt sei, müssen wenigstens drei entsprechende Punktenpaare gegeben sein (§. 10, *β.*). Es seien etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ (Fig. 22.) gegeben. Man suche zuvörderst die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen, und zwar dadurch, dafs man die Geraden perspectivisch legt, nämlich sie so legt, dafs sie einander schneiden, und dafs eins der drei entsprechenden Punktenpaare, etwa $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, in ihrem Durchschnitte vereinigt sind; d. h., man zieht durch $\mathfrak{c}$ eine beliebige dritte Gerade $A^1$, nimmt darin, aufser dem mit $\mathfrak{c}$ vereinigten Punkte $\mathfrak{c}^1$, die Punkte $\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{b}^1$ so, dafs $\mathfrak{a}^1\mathfrak{c}^1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}^1\mathfrak{c}^1 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, und zieht ferner die Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^1$, die sich in $B$ begegnen, und durch diesen Punkt $B$ zieht man endlich die Parallelstrahlen $r$, $q$, so ist $\mathfrak{r}$ der eine, und wenn $\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{q}^1\mathfrak{a}^1$, und zwar gleichliegend, genommen wird, so ist $\mathfrak{q}_1$ der andere gesuchte Punkt. Sind die Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ gefunden, so ist zur Lösung der Aufgabe nur noch nöthig,

in den vereinigten Geraden ($A A_1$) zwei Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ zu finden, für welche die Rechtecke $\mathfrak{e}\mathfrak{r}.\mathfrak{e}\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{f}\mathfrak{r}.\mathfrak{f}\mathfrak{q}_1$ gegebenen Inhalt haben, nämlich mit dem gegebenen Rechteck $\mathfrak{a}\mathfrak{r}.\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$ gleichen Inhalt haben, welches eine bekannte elementar Aufgabe ist; denn alsdann sind $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ diejenigen Punkte, die sich mit ihren entsprechenden $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$ vereinigen. Nur hat man in Hinsicht der Lage der Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ ausserdem die oben (§. 16, II.) auseinandergesetzten Umstände genau zu berücksichtigen.

b) Auf ganz ähnliche Weise kann man bei den Strahlbüscheln $B$, $B_1$ verfahren. Nämlich durch Hülfe eines Strahlbüschels $B^1$, welches $B_1$ gleich ist und mit $B$ perspectivisch liegt, sucht man zuerst die entsprechenden rechten Winkel ($\mathfrak{s}\mathfrak{t}$), ($\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_1$), u. s. w. Oder man kann diese Aufgabe auf die erste (a) bringen, und zwar dadurch, dafs man die vereinigten Strahlbüschel ($B B_1$) durch irgend eine Gerade schneidet, und diese als zwei vereinigte Gerade ($A A_1$) betrachtet, eben so, wie schon vorhin (§. 16, II.) geschehen ist.

II. Eine andere, viel einfachere Auflösung, deren Richtigkeit jedoch erst später (§. 46, III.) bewiesen wird, ist folgende:

a) Man ziehe irgend eine Kreislinie $\alpha \varkappa B$ (Fig. 23.), und ziehe aus einem beliebigen Punkte $B$ derselben durch die drei in den vereinigten Geraden ($A A_1$) gegebenen Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ die Geraden $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$,....., welche die Kreislinie zum zweiten Male in den Punkten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ schneiden, verbinde von diesen Punkten das eine Paar gleichnamige, etwa $\alpha$, $\alpha_1$, wechselseitig mit den beiden anderen Paaren, nämlich so: man ziehe die Geraden $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$, die sich in $\beta_2$, und die Geraden $\alpha\gamma_1$, $\alpha_1\gamma$, die sich in $\gamma_2$ schneiden; ziehe sofort die Gerade $\beta_2\gamma_2$, welche die Kreislinie in den Punkten $\varepsilon$, $\varkappa$ schneidet, und durch

diese Punkte ziehe man endlich aus B die Geraden $B\varepsilon$, $B\varkappa$, so werden diese der Geraden $(AA_1)$ in den gesuchten vereinigten entsprechenden Punktenpaaren $e$ und $e_1$, $f$ und $f_1$ begegnen. Sind die Geraden A, $A_1$ gleichliegend, so wird die Gerade $\beta_2\gamma_2$ den Kreis entweder 1) schneiden, oder 2) berühren, oder 3) gar nicht treffen, je nachdem 1) zwei, oder 2) ein, oder 3) gar kein Paar entsprechende Punkte zusammentreffen (§. 16.).

Sobald also irgend ein Kreis (oder überhaupt ein Kegelschnitt), der mit den aufeinander gelegten Geraden $(AA_1)$ in einer Ebene liegt, gegeben ist, so kann die Aufgabe mittelst des Lineals allein gelöst werden. Diese Auflösung wurde hier nicht nur deshalb mitgetheilt, weil sie an und für sich sehr bemerkenswerth ist, sondern weil sie in der Folge noch bei vielen anderen Aufgaben Anwendung findet, und zwar so, dafs man dadurch zu Auflösungen gelangt, die vor den bisher bekannten grofsen Vorzug verdienen.

b) Auch die andere Aufgabe kann auf ganz entsprechende Weise gelöst werden, d. h., statt eines Punktes B in der Kreislinie wird irgend eine Tangente an derselben angenommen u. s. w. Das Ausführlichere dieser Auflösung wird hier übergangen. Uebrigens ist es einfacher die Aufgabe eben so, wie vorhin (I.), auf die erste zu bringen und nach vorstehender Vorschrift (a) zu lösen. Oder wenn der Hülfskreis nicht in bestimmter Lage gegeben ist, sondern wenn es gestattet ist, ihn beliebig zu ziehen, so kann man ihn so ziehen, dafs er durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Strahlbüschel geht, wie etwa, wenn in dem vorerwähnten Punkte B beide Mittelpunkte B, $B_1$ vereiniget wären, so würde man alsdann mittelst der entsprechenden Strahlen a, b, c und $a_1$, $b_1$, $c_1$, die vereinigten ent-

sprechenden Strahlen e und $e_1$, k und $k_1$, durch das vorige Verfahren (a) können finden, wie leicht zu sehen.

18. Die wichtigsten Eigenschaften, welche bei der schiefen Lage zweier projectivischer Geraden A, $A_1$ und zweier projectivischer Strahlbüschel B, $B_1$ statt haben, nämlich das Gesetz, welchem bei den Geraden die Projectionsstrahlen und bei den Strahlbüscheln die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen unterworfen sind, können hier noch nicht in ihrem ganzen Umfange erforscht werden; sie sind daher zum Theil dem dritten Kapitel vorbehalten.

Vorläufig sollen nur folgende Sätze und Aufgaben, die sich leicht auf vorangegangene Sätze und Aufgaben bringen lassen, aufgestellt werden.

„Wenn zwei projectivische Gerade A, $A_1$ sich in schiefer Lage befinden, so gehen durch irgend einen Punkt B im Allgemeinen und höchstens nur zwei Projectionsstrahlen; und also können auch nur höchstens zwei und zwei Projectionsstrahlen parallel sein."

Denn denkt man sich um den genannten Punkt B zwei Strahlbüschel B, $B_1$, die mit den gegebenen Geraden perspectivisch sind, so müssen dieselben unter sich projectisch sein (§. 11.), und ihre zwei Paar vereinigte entsprechende Strahlen (§. 16, II.) müssen offenbar die zwei genannten Projectionsstrahlen der Geraden A, $A_1$ sein.

„Wenn zwei projectivische Strahlbüschel B, $B_1$ sich in schiefer Lage befinden, so liegen auf irgend einer Geraden A im Allgemeinen und höchstens nur zwei Durchschnitte entsprechender Strahlen; also können auch nur höchstens zwei Paar entsprechende Strahlen parallel sein."

Denn denkt man sich zwei Gerade A, $A_1$, die in der genannten Geraden A aufeinander liegen, und die mit den gegebenen Strahlbüscheln perspectivisch sind, so müssen dieselben unter sich projectivisch sein (§. 11.), und ihre zwei Paar vereinigte entsprechende Punkte (§. 16, II.), müssen offenbar Durchschnitte entsprechender Strahlen der Strahlbüschel B, $B_1$ sein.

Werden nun die Aufgaben gestellt:

„Bei zwei schiefliegenden projectivischen Geraden $A$, $A_1$ die (zwei) Projectionstrahlen zu finden, die durch irgend einen gegebenen Punkt $B$ gehen;"

„Bei zwei schiefliegenden projectivischen Strahlbüscheln $B$, $B_1$ diejenigen Durchschnitte entsprechender Strahlen zu finden, die in einer gegebenen Geraden $A$ liegen;"

so ist zufolge des vorstehenden Satzes klar, wie sie nach (§. 17.) leicht zu lösen sind.

Welchen Spielraum, wenn die Geraden $A$, $A_1$ gegeben sind, der Punkt $B$ hat, damit entweder zwei, oder ein, oder gar kein Projectionsstrahl durch denselben geht, und welchen Spielraum, wenn die Strahlbüschel $B$, $B_1$ gegeben sind, die Gerade $A$ hat, damit entweder zwei, oder ein, oder gar kein Durchschnitt von entsprechenden Strahlen in ihr liegt, wird, wie schon erwähnt, durch weitere Entwickelungen im dritten Kapitel klar hervortreten.

Durch eine bald folgende Betrachtung wird gezeigt werden, wie bei der schiefen Lage der beiden Paar Gebilde $A$ und $A_1$, $B$ und $B_1$, durch ein sehr einfaches Verfahren, nämlich mittelst des Lineals allein, schief projicirt werden kann, d. h., beliebige entsprechende Elemente gefunden werden können.

### Sätze und Porismen, die aus Zusammenstellung der Gebilde entspringen.

19. Nachdem die Eigenschaften und die Fundamentalsätze über projectivische Gerade und Strahlbüschel aufgefunden sind, dürfte es wohl für Viele wünschenswerth sein, an einigen Beispielen zu sehen, wie sehr umfassend diese Sätze sind, d. h., wie sie die eigentliche Grundlage vieler anderen Sätze sind, die unmittelbar aus ihnen hervorgehen, wie durch sie manche

anscheinend schwere Aufgaben, leicht zu lösen sind, und wie endlich durch sie besonders die eigentliche Bedeutung verschiedener Porismen verständlich hervortritt.

Zu diesem Endzweck sollen zur Erleichterung folgende Erklärungen festgestellt werden.

Seit Carnot zuerst auf die Vollständigkeit oder auf das Umfassende der Figuren aufmerksam gemacht, braucht man häufig den Ausdruck „vollständiges Viereck" (*quadrilatère complet*). Man hat aber dabei zwei wesentlich verschiedene Figuren gar nicht von einander unterschieden, was doch bei genauer und vollständiger Betrachtung durchaus nicht außer Acht gelassen werden darf und kann. Nämlich man hat genau zu unterscheiden a) „vollständiges Vierseit" und b) „vollständiges Viereck", und zwar unterscheiden sie sich wie folgt:

„Vollständiges Vierseit" heißen jede vier Gerade A, B, C, D (Fig. 24.) zusammengefaßt; die sechs Durchschnitte a, b, c, d, e, f der Seiten heißen Ecken desselben; es hat also drei Paar einander gegenüber liegende Ecken, nämlich a und f, b und e, c und d, und somit hat es drei Diagonalen af, be, cd; und endlich umfaßt es drei einfache Vierseit, nämlich abfea, acfda, bcedb.

„Vollständiges Viereck," heißen jede vier Punkte a, b, c, d (Fig. 25.) zusammengefaßt; die sechs Geraden, welche durch die Punkte bestimmt werden, heißen Seiten desselben; es hat also drei Paar einander gegenüber liegende Seiten, nämlich ab und cd, ac und bd, ad und bc, und somit drei Durchschnitte e, f, g gegenüber liegender Seiten; und endlich umfaßt es drei einfache Vierecke, nämlich abcda, acdba, acdba.

Ein einfaches Viereck ist auch zugleich ein einfaches Vierseit, so daß also derselben Figur der eine oder der andere von diesen zwei Namen beigelegt werden kann. Dasselbe gilt vom einfachen Fünfeck und Fünfseit, u. s. w. Ein vollständiges Fünfeck aber, so wie ein vollständiges Fünfseit be-

steht aus 12 einfachen **Fünfecken** oder **Fünfseiten**; und sowohl das vollständige **Sechseck**, als **Sechsseit** besteht, wie ich schon bei einer anderen Gelegenheit (*Annales de mathem.* Tom. XVIII.) angegeben habe, aus 60 einfachen **Sechsecken** oder **Sechsseiten**. Nämlich, wenn man die obigen Erklärungen weiter ausdehnt, so lauten sie im Allgemeinen, und wie **Carnot** zum Theil schon angegeben hat, wie folgt.

„**Vollständiges** n **Seit** heifsen jede n Gerade in einer Ebene zusammengefafst; die $\frac{n(n-1)}{2}$ Durchschnitte der Seiten (Geraden) heifsen **Ecken** desselben; es besteht aus $\frac{1.2.3.4\ldots(n-1)}{2}$ einfachen n **Seiten** oder n **Ecken**."

„**Vollständiges** n **Eck** heifsen jede n Punkte in einer Ebene zusammengefafst; die $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden, die durch die Ecken (Punkte) bestimmt werden, heifsen **Seiten** desselben; es besteht aus $\frac{1.2.3.4\ldots(n-1)}{2}$ einfachen n **Ecken** oder n **Seiten**."

Ein einfaches n Eck entsteht nämlich, wenn man n Punkte, nach irgend einer Ordnung genommen, in einem Zuge durch n maliges Absätzen verbindet, so jedoch, dafs man bei jedem Punkte einmal anhält, und zuletzt wieder in den Anfangspunkt zurückkehrt. Danach wird man sich leicht von der Richtigkeit der in den vorstehenden Erklärungen angegebenen Zahlen überzeugen können (s. §. 25, Note.)

20. Es sei a, b, $a_1$, $b_1$ (Fig. 26.) ein beliebiges vollständiges Vierseit, dessen drei Diagonalen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ (§. 19.) sich in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ schneiden. Man denke sich zu den drei Strahlen a, b, c den vierten, dem c zugeordneten, harmonischen Strahl d, und eben so zu den drei Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$ den, dem $c_1$ zugeordneten, vierten harmonischen Strahl $d_1$, so müssen, zufolge früherer Sätze, beide Strahlen d und $d_1$ die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{C}$ in demjenigen Punkte $\mathfrak{D}$ schneiden, der zu den drei

Durchschnitten $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{C}$ der vierte, dem $\mathfrak{C}$ zugeordnete harmonische Punkt ist; und eben so müssen beide Strahlen d, $d_1$ durch denjenigen Punkt $\mathfrak{D}$ der Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{E}$ gehen, der zu den drei Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{E}$ der vierte, und zwar dem $\mathfrak{E}$ zugeordnete, harmonische Punkt ist; da aber beide Strahlen d, $d_1$ nur einen einzigen Punkt $\mathfrak{D}$ gemein haben können, so mufs dieser zugleich der Durchschnitt der beiden Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{C}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{E}$ sein, und folglich schneiden die Diagonalen einander so, dafs die zwei Durchschnitte $\mathfrak{D}, \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ in den Diagonalen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ zu den zugehörigen Ecken $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}$ zugeordnete harmonische Punkte sind. Auf gleiche Weise folgt, dafs auch $\mathfrak{C}, \mathfrak{E}$ zu den Ecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zugeordnete harmonische Punkte sind; oder dieses folgt auch daraus, dafs vermöge der harmonischen Strahlen a, d, b, c die Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{B}$, und vermöge dieser die Strahlen $\mathfrak{D}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, und vermöge dieser endlich die Punkte $\mathfrak{E}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}$ harmonisch sind.

Da die vier Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ ein beliebiges vollständiges Viereck darstellen, dessen gegenüber liegenden Seitenpaare sich in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ schneiden, und wo diese Durchschnitte durch die Strahlen c (oder $c_1$), d, $d_1$ verbunden sind, so ist durch die vorstehende Betrachtung auch zugleich dargethan, dafs bei einem solchen Viereck die Strahlen, welche die Durchschnitte der gegenüber liegenden Seiten verbinden, zu den letzteren zugeordnete harmonische Strahlen sind, dafs nämlich die Strahlen d, c zu den Seiten a, b (oder $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$), die Strahlen $c_1$, $d_1$ zu den Seiten $a_1$, $b_1$, und die Strahlen d, $d_1$ zu den Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ zugeordnete harmonische Strahlen sind.

Aus dieser Betrachtung folgt nachstehende Reihe von Sätzen und Aufgaben.

I. „Im vollständigen Vierseit sind die Punkte, in welchen die drei Diagonalen einander schneiden, zu den zugehörigen Ecken zugeordnete harmonische Punkte."

I. „Im vollständigen Viereck sind die Strahlen, welche die Durchschnitte der gegenüber liegenden Seitenpaare verbinden, zu den letzteren zugeordnete harmonische Strahlen."

Der Satz links wurde vornehmlich durch Carnot allgemeiner bekannt, ungeachtet man denselben schon in Pappus Collect. Mathem. libr. VII. findet.

II. „Zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu finden, jedoch nur mittelst des Lineals allein."

Sind etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{C}$ gegeben und man will den, dem $\mathfrak{C}$ zugeordneten, vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{D}$ finden, so ziehe man durch $\mathfrak{C}$ irgend eine Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, nehme darin zwei willkührliche Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, verbinde diese mit den zwei übrigen gegebenen Punkten durch Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1$, die sich in $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ schneiden, so wird die Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ durch den gesuchten Punkt $\mathfrak{D}$ gehen.

II. „Zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen Strahl zu finden, jedoch nur mittelst des Lineals allein."

Sind etwa a, b, c gegeben und man will den, dem c zugeordneten, vierten harmonischen Strahl d finden, so nehme man in c irgend einen Punkt $\mathfrak{B}$, ziehe durch diesen willkührlich zwei Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1$, die den Strahlen a, b in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ begegnen, verbinde diese durch die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$, die sich in dem Punkte $\mathfrak{D}$ schneiden, so wird die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ der verlangte Strahl sein.

Die Aufgabe links wurde zuerst von De Lahire (Sectione conicae. 1685.) auf diese nämliche Art gelöst.

III. „Wenn drei Gerade und ein Punkt gegeben sind, so soll, mittelst des Lineals allein, durch den Punkt eine Gerade so gezogen werden, dafs er und die drei Durchschnitte, welche sie mit den drei Geraden macht, vier harmonische Punkte sind."

III. „Wenn drei Punkte und eine Gerade gegeben sind, so soll mittelst des Lineals allein, in der Geraden ein Punkt gefunden werden, dafs sie und die drei Geraden, welche er mit den drei Punkten bestimmt, vier harmonische Strahlen sind."

Sind etwa $a_1$, $b_1$, b und $\mathfrak{D}$ gegeben, so ziehe man z. B. die Gerade $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ oder $d_1$, suche zu den drei Strahlen $a_1$, $b_1$, $d_1$ den vierten, dem $d_1$ zugeordneten, harmonischen Strahl $c_1$ (II.), der der dritten Geraden b in $\mathfrak{A}$ begegnet, so wird die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ der Aufgabe genügen, d. h., die vier Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{A}$ sind harmonisch. Zwei andere Gerade, welche ebenfalls der Aufgabe genügen, findet man auf ähnliche Weise.

Sind etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und b gegeben, so ziehe man z. B. die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{B}$, suche zu den drei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{B}$ den vierten, dem $\mathfrak{B}$ zugeordneten, harmonischen Punkt $\mathfrak{d}$ (II.), ziehe die Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{D}$, so wird diese der gegeben Geraden b in einem Punkte $\mathfrak{A}$ begegnen, welcher der Aufgabe genügt, so dafs a, d, b, c, harmonisch sind. Zwei andere Punkte, die auch der Aufgabe genügen, findet man auf ähnliche Weise.

Wird $\mathfrak{A}$ als Projectionspunkt der Geraden $a_1$, $b_1$ angesehen, so dafs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,..... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$,..... entsprechende Punkte sind, und wird $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ als perspectivischer Durchschnitt der Strahlbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ angenommen, so dafs a, d, b, c,..... und $a_1$, $d_1$, $b_1$, $c_1$, ..... entsprechende Strahlen sind, so folgt ferner:

IV. „Dafs wenn man bei zwei perspectivischen Geraden $a_1$, $b_1$ je zwei entsprechende Punktenpaare wechselseitig ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, oder mit $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, u. s. w.) durch Gerade ($\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$, und $\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1$,...) verbindet, so liegen die Durchschnitte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$,... aller dieser Paar Geraden in einer bestimmten Geraden $d_1$, die nämlich zu den perspectivischen Geraden $a_1$, $b_1$ und zu dem durch ihren Durchschnitt $\mathfrak{B}$ gehenden Projectionsstrahle c oder $c_1$ der vierte, dem $c_1$ zugeordnete, harmonische Strahl ist."

IV. „Dafs wenn man bei zwei perspectivischen Strahlbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ je zwei entsprechende Strahlenpaare sich wechselseitig schneiden läfst (a, $a_1$ mit b, $b_1$, oder mit d, $d_1$, u. s. w.), und die Durchschnitte ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{d}$,...) durch Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{d}$,... verbindet, so gehen diese alle durch einen bestimmten Punkt $\mathfrak{C}$, der nämlich zu den Mittelpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der Strahlbüschel und zu demjenigen Punkte $\mathfrak{C}$, in welchem ihr gemeinschaftlicher Strahl (c $c_1$) vom perspectivischen Durchschitte $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ getroffen wird, der vierte, dem $\mathfrak{C}$ zugeordnete, harmonische Punkt ist."

Der Satz links ist (mit anderen Worten ausgesprochen) allgemein bekannt. Es ist leicht zu sehen, wie vermöge dieser Sätze die folgenden Augaben:

V. „Durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{D}$ eine Gerade $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ zu ziehen, welche durch den Durchschnitt $\mathfrak{B}$ zweier gegebenen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ geht, im Falle dieser Durchschnitt unzugänglich ist."

V. „In einer gegebenen Geraden $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ denjenigen Punkt $\mathfrak{E}$ zu finden, welcher mit zwei gegebenen Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in einer Geraden liegt, im Falle diese Gerade nicht gezogen werden kann."

wovon die eine, links, ebenfalls allgemein bekannt ist, mittelst des Lineals allein zu lösen sind.

Weiter unten wird man finden, dafs die Sätze (IV.) nur besondere Fälle von allgemeineren Sätzen sind, die nämlich statt finden, wenn die projectivischen Gebilde $a_1$, $b_1$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sich in schiefer Lage befinden.

Es liefsen sich hier noch eine Menge Folgerungen ziehen, die namentlich das Dreieck, die Theorie der Transversalen, u. s. w. betreffen, bei denen ich mich aber nicht aufhalten kann.

21. Sind drei Gerade A, $A_1$, $A_2$ (Fig. 27.) unter einander projectivisch, nämlich in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,.....; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$,.....; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$,....., und liegen sie so, dafs sie einander in einem Punkte schneiden, und dafs in demselben drei entsprechende Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ vereiniget sind, und dafs mithin je zwei Gerade perspectivisch liegen, so müssen nothwendiger Weise die drei Projectionspunkte B, $B_1$, $B_2$ in einer Geraden liegen. Denn sind B, $B_1$ die Projectionspunkte der Geraden A und $A_1$, A und $A_2$, so ist die Gerade $BB_1$ ein Projectionsstrahl sowohl von A und $A_1$, als von A und $A_2$, so dafs also der Punkt $\mathfrak{d}$, in welchem sie A begegnet, den Punkten $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, in welchen sie $A_1$, $A_2$ schneidet, entspricht, und dafs sie folglich auch ein

Projectionsstrahl von $A_1$ und $A_2$ ist, und durch ihren Projectionspunkt $B_2$ geht.

Wird umgekehrt angenommen drei Strahlbüschel B, $B_1$, $B_2$ seien unter einander projectivisch, und liegen so, dafs drei entsprechende Strahlen d, $d_1$, $d_2$ vereinigt sind, dafs mithin je zwei Strahlbüschel perspectivisch liegen, so folgt auf ähnliche Weise, wie vorhin, dafs die drei perspectivischen Durchschnitte A, $A_1$, $A_2$ einander in einem Punkte ($\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$) treffen. Also hat man folgende Sätze:

I. „Sind drei Gerade A, $A_1$, $A_2$ unter einander projectivisch und liegen sie so, dafs sie sich in einem Punkte schneiden, und dafs in demselben drei entsprechende Punkte vereiniget, und mithin je zwei Gerade perspectivisch sind, so liegen die drei Projectionspunkte B, $B_1$, $B_2$ in einer Geraden."

I. „Sind drei Strahlbüschel B, $B_1$, $B_2$ unter einander projectivisch und liegen sie so, dafs drei entsprechende Strahlen auf einander fallen, also ihre Mittelpunkte in einer Geraden liegen, und mithin je zwei Strahlbüschel perspectivisch sind, so treffen sich die drei perspectivischen Durchschnitte A, $A_1$, $A_2$ in einem Punkt."

Aus diesen Sätzen folgen unmittelbar nachstehende bekannte Sätze:

II. „Treffen die drei Geraden A, $A_1$, $A_2$, welche die Ecken irgend zweier Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, in bestimmter Ordnung genommen, paarweise verbinden, in einem Punkte zusammen, so liegen die drei Punkte B, $B_1$, $B_2$, in welchen die gegenüber liegenden Seiten, in gleicher Ordnung paarweise genommen, einander schneiden, in einer Geraden." Denn man kann

II. „Liegen die drei Punkte B, $B_1$, $B_2$, in welchen die Seiten irgend zweier Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, in bestimmter Ordnung paarweise genommen, sich schneiden, in einer Geraden, so treffen die drei Geraden A, $A_1$, $A_2$, welche die gegenüber liegenden Ecken, in gleicher Ordnung paarweise genommen, verbinden, allemal in einem Punkte zusammen." Denn

festsetzen die Geraden A, $A_1$ und $A_2$ sollen in Ansehung der gleichnamigen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{e}_2$ projectivisch sein (§. 10, $\gamma$.).

man kann festsetzen die Strahlbüschel B, $B_1$ und $B_2$ sollen in Ansehung der gleichnamigen Strahlen a, b, d und $a_1$, $b_1$, $d_1$ und $a_2$, $b_2$, $d_2$ projectivisch sein (§. 10, $\gamma$.).

Es folgt ferner:

III. „Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ in drei festen Geraden A, $A_1$, $A_2$, die durch einen Punkt $\mathfrak{e}$ gehen, und drehen sich zwei Seiten desselben, etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, um feste Punkte B, $B_1$, so geht auch die dritte Seite $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ beständig durch einen dritten festen Punkt $B_2$, der mit jenen beiden in einer Geraden liegt."

III. „Drehen sich die Seiten eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ um drei feste Punkte B, $B_1$, $B_2$, die in einer Geraden d liegen, und bewegen sich zwei Ecken desselben, etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, in festen Geraden A, $A_1$, so bewegt sich auch die dritte Ecke $\mathfrak{a}_2$ in einer dritten festen Geraden $A_2$, die sich mit jenen beiden in einem Punkte schneidet."

Bei den obigen Sätzen (I.) ist der besondere Fall möglich, dafs einerseits (links) die drei Projectionspunkte B, $B_1$, $B_2$, und andererseits die drei perspectivischen Durchschnitte A, $A_1$, $A_2$ zusammen fallen; dieses leitet daher auf nachstehende Aufgaben.

IV. „Drei gegebene Gerade A, $A_1$, $A_2$, die unter einander projectivisch sind, so in perspectivische Lage zu bringen, dafs sie sich in einem Punkte $\mathfrak{e}$ schneiden und einen gemeinschaftlichen Projectionspunkt B haben."

IV. „Drei gegebene Strahlbüschel B, $B_1$, $B_2$, die unter einander projectivisch sind, so in perspectivische Lage zu bringen, dafs ihre Mittelpunkte in einer Geraden liegen, und dafs sie einen gemeinschaftlichen perspectivischen Durchschnitt A haben."

Die **Auflösungen** dieser Aufgaben sollen den Liebhabern vorläufig zur Uebung überlassen bleiben: sie lassen sich leicht auf frühere Sätze gründen (§. 15.); später sollen sie mitgetheilt werden. Ich will hier nur

angeben, dafs die erste Aufgabe (links), im Allgemeinen unendlich viele Auflösungen zuläfst, wobei sich verschiedene drei entsprechende Punkte der Geraden in deren gemeinschaftlichem Durchschnitte vereinigen lassen. Giebt es auch entsprechende Punkte, bei deren Vereinigung keine Auflösung statt findet? und welchen Spielraum haben sie? Was findet insbesondere statt, wenn die Geraden ähnlich sind? — Die andere Aufgabe dagegen läfst im Allgemeinen der Hauptsache nach nur zwei Auflösungen zu.

22. Durch Wiederholung oder Zusammensetzung eines obigen Satzes (§. 21.) gelangt man unmittelbar zu einem berühmten Porisma, welches Pappus, in der Vorrede zum VII. Buch der Collectiones Mathematicae, mittheilt, und welches, wegen seines Scheins von Allgemeinheit, leicht für schwerer und umfassender gehalten wird, als es in der That ist, nämlich zu dem folgenden Porisma:

I. „Wenn in einer Ebene n beliebig gezogene gerade Linien einander irgend wie durchschneiden, und man hält die n — 1 Durchschnittspunkte fest, die einer von ihnen, gleich viel welcher, angehören, während man alle übrigen beziehlich um diese Punkte bewegt, und während n — 2 von ihren gegenseitigen Durchschnitten, wovon keine drei denselben drei Geraden, keine vier denselben vier Geraden, u. s. w. angehören, gezwungen sind auf einer gleichen Anzahl gegebener Geraden, als Leitlinien genommen, zu bleiben: so werden alle übrigen Durchschnitte der bewegten Geraden, deren Anzahl eine Triangularzahl ist, einzeln andere Gerade beschreiben, die mit jenen

jenen Leitlinien zugleich der Lage nach gegeben sein werden.""

In neuerer Zeit hat Robert Simson zuerst diesen Satz bewiesen. Mittelst der oben festgesetzten Erklärungen (§. 19.) kann der vorstehende Satz, nebst seinem entsprechenden Satze wie folgt ausgesprochen werden.

II. „Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen vollständigen n Ecks in n festen Geraden, die durch einen Punkt gehen, und drehen sich n—1 Seiten desselben, die irgend einem einfachen n Eck angehören, aus welchen das vollständige besteht, um eben so viele feste Punkte: so drehen sich auch die übrigen Seiten, an Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$, um andere feste Punkte, die also mit jenen festen Punkten zugleich gegeben sind."

II. „Drehen sich die Seiten eines vollständigen veränderlichen n Seits um n feste Punkte, die in einer Geraden liegen, und bewegen sich n—1 Ecken desselben, die irgend einem einfachen n Eck angehören, aus denen das vollständige besteht, in eben so vielen festen Geraden: so bewegen sich auch die übrigen Ecken, an Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$, in anderen festen Geraden, die also mit jenen festen Geraden zugleich gegeben sind."

In der That sind diese zwei Sätze, wie schon erwähnt worden, nichts anderes als eine zusammenhängende Wiederholung der obigen einfachen Sätze (§. 21, I.). Oder noch leichter können sie aus folgenden Sätzen, deren Richtigkeit von selbst erhellet, zusammengesetzt werden. Nämlich:

III. „Wenn bei drei Geraden $A$, $A_1$, $A_2$, die einander in einem Punkte schneiden, zwei mit der dritten projectivisch sind und mit ihr perspectivisch liegen, so sind sie auch unter sich

III. „Wenn von drei Strahlbüscheln $B$, $B_1$, $B_2$, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, zwei mit dem dritten projectivisch sind, und mit ihm perspectivisch liegen, so sind sie auch

projectivisch und liegen perspectivisch."

unter sich projectivisch und liegen perspectivisch."

Daraus folgt, durch Zusammensetzung, unmittelbar:

IV. „Dafs wenn von n Geraden $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, die durch einen und denselben Punkt gehen, der Reihe nach jede mit der darauf folgenden projectivisch ist, und mit ihr perspectivisch liegt, dann alle unter einander projectivisch sind, und perspectivisch liegen."

IV. „Dafs wenn von n Strahlbüscheln $B, B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, der Reihe nach jedes mit dem darauf folgenden projectivisch ist, und mit ihm perspectivisch liegt, dann alle unter einander projectivisch sind, und perspectivisch liegen."

In diesen Sätzen sind die obigen (II.) enthalten. Denn wenn z. B., nach dem Satze (II, links), die Ecken eines vollständigen Vierecks $a, a_1, a_2, a_3$ (Fig. 28.) sich in den festen Geraden $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ bewegen, während sich etwa die drei Seiten $a a_1$, $a_1 a_2$, $a_2 a_3$ des einfachen Vierecks $a a_1 a_2 a_3 a$ um die drei festen Punkte $B$, $B_1$, $B_2$ drehen, so sind offenbar $A$ und $A_1$, $A_1$ und $A_2$, $A_2$ und $A_3$ in Ansehung der Punkte $a$ und $a_1$, $a_1$ und $a_2$, $a_2$ und $a_3$ projectivisch, und liegen perspectivisch, nämlich $B$, $B_1$, $B_2$ sind ihre Projectionspunkte; daher sind, zufolge vorstehenden Satzes, auch $A$ und $A_2$, $A_1$ und $A_3$, $A$ und $A_3$, in Ansehung der Punkte $a$ und $a_2$, $a_1$ und $a_3$, $a$ und $a_3$, projectivisch und liegen perspectivisch, so dafs folglich auch die drei übrigen Seiten $a a_2$, $a_1 a_3$, $a a_3$ des vollständigen Vierecks sich um feste Punkte $B_4$, $B_5$, $B_3$ drehen, nämlich um die Projectionspunkte der letzgenannten Paar Geraden. Ueberdies folgt auch noch (§. 21, I.), dafs von den sechs Punkten $B$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ viermal drei in einer Geraden liegen, dafs sie also die Ecken eines vollständigen Vierseits sind.

Wenn andererseits z. B. die Seiten eines vollständigen Vierseits $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ (Fig. 29.) sich um feste Punkte $B$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ drehen, die in einer Geraden liegen, während sich etwa die drei Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ des Vierecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}$ in den drei festen Geraden $A$, $A_1$, $A_2$ bewegen, so sind offenbar die Strahlbüschel $B$ und $B_1$, $B_1$ und $B_2$, $B_2$ und $B_3$, in Ansehung der entsprechenden Strahlen $a$ und $a_1$, $a_1$ und $a_2$, $a_2$ und $a_3$ projectivisch und liegen perspectivisch, nämlich $A$, $A_1$, $A_2$ sind ihre perspectivischen Durchschnitte; daher sind auch die Strahlbüschel $B$ und $B_2$, $B_1$ und $B_3$, $B$ und $B_3$, in Ansehung der Strahlen $a$ und $a_2$, $a_1$ und $a_3$, $a$ und $a_3$, projectivisch und liegen perspectivisch (IV.), so dafs folglich auch die drei übrigen Ecken $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_5$, $\mathfrak{a}_3$ des vollständigen Vierseits sich in bestimmten festen Geraden $A_4$, $A_5$, $A_3$ bewegen, nämlich in den perspectivischen Durchschnitten der letztgenannten Strahlbüschelpaare. Ueberdies folgt noch (§. 21, I.), dafs die 6 Geraden $A$, $A_1$, ..... $A_5$ die 6 Seiten eines vollständigen Vierecks $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sind.

Ganz eben so, wie bei diesen Beispielen, lassen sich die Sätze bei jeder anderen Figur nachweisen. Verschiedene besondere Fälle der obigen Sätze (II. oder IV.) — die einerseits (links) dadurch entstehen, dafs von den festen Geraden einige auf einander fallen, oder dafs die festen Punkte in einer Geraden liegen, und dafs diese durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt der festen Geraden geht, u. s. w.; und andererseits dadurch, dafs die festen Punkte theilweise vereiniget werden, oder dafs die festen Geraden durch einen Punkt gehen, und dafs dieser mit den festen Punkten in einer Geraden liegt, u. s. w. — werden hier übergangen. Uebrigens sind die obigen Sätze selbst nur besondere Fälle

von allgemeineren und umfassenderen Sätzen, die in den zwei nächstfolgenden Kapiteln bewiesen werden.

23. Schneiden sich drei Gerade $A, A_1, A_3$ (Fig. 30.), die unter einander projectivisch sind, in drei Punkten, und liegen je zwei derselben perspectivisch, so dafs also in jedem Durchschnitte zwei entsprechende Punkte vereiniget sind, nämlich $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, und sind $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{l}$ die den vereinigten Punkten entsprechenden dritten Punkte, so sind in jedem der drei Strahlen $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}$ zwei Projectionsstrahlen vereiniget, nämlich $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}$, und daher müssen ihre gegenseitigen Durchschnitte $B, B_1, B_2$ die Projectionspunkte der Geradenpaare $A$ und $A_1$, $A$ und $A_2$, $A_1$ und $A_2$ sein. Da auf ähnliche Weise, wenn man, statt von den Geraden $A, A_1, A_2$, von den Strahlbüscheln $B, B_1, B_2$ ausgeht, auch das Umgekehrte sich darthun läfst, so folgen also nachstehende Sätze.

I. „Wenn die Seiten $A, A_1$ $A_2$ eines Dreiecks $\mathfrak{efl}$, unter einander projectivisch sind, und wenn je zwei perspectivisch liegen, so sind ihre Projectionspunkte $B$, $B_1$, $B_2$, die Ecken eines anderen jenem umbeschriebenen Dreiecks."

I. „Wenn die Ecken eines Dreiecks $BB_1B_2$ die Mittelpunkte projectivischer Strahlbüschel sind, wovon je zwei perspectivisch liegen, so bilden ihre perspectivischen Durchschitte $A, A_1, A_2$ ein Dreieck $\mathfrak{efl}_1$, welches jenem eingeschrieben ist."

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ irgend drei entsprechende Punkte, so ist das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ dem Dreiecke (Dreiseit) $A$, $A_1$, $A_2$ eingeschrieben und zugleich dem Dreiecke $BB_1B_2$ umschrieben; und da zur Bestimmung der projectivischen Beziehung der drei Geraden $A, A_1, A_2$ oder der drei Strahlbüschel $B, B_1, B_2$, dreimal drei entsprechende Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$; $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$; $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ oder Strahlen $e$, $e_1$, $e_2$; $k$, $k_1$, $k_2$; $l$, $l_1$, $l_2$, willkührlich ange-

nommen werden können, so folgen ferner unmittelbar nachstehende Sätze.

II. „Wenn einem beliebigen Dreieck $A, A_1, A_2$ irgend ein zweites $BB_1B_2$ umschrieben ist, so giebt es unzählig viele andere Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, ($\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, .....), von denen jedes dem ersten eingeschrieben und zugleich dem zweiten umschrieben ist." Nämlich:

„Beschreibt man irgend ein Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, dessen Ecken, in bestimmter Ordnung genommen, in den Seiten jenes ersten Dreiecks liegen, und von dessen Seiten zwei durch zwei Ecken des zweiten gehen, so geht allemal auch die dritte Seite desselben durch die dritte Ecke des zweiten."

„Beschreibt man irgend ein Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, dessen Seiten, in bestimmter Ordnung genommen, durch die Ecken jenes zweiten Dreiecks gehen, und von dessen Ecken zwei in zwei Seiten des ersten liegen, so liegt allemal auch die dritte Ecke desselben in der dritten Seite des ersten."

Oder mit anderen Worten:

„Ist einem Dreieck $A, A_1, A_2$ ein zweites $BB_1B_2$ umschrieben und bewegen sich die Ecken eines dritten Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ in den Seiten des ersten, während zwei Seiten, in bestimmter Ordnung genommen, sich um zwei Ecken des zweiten drehen, so dreht sich auch die dritte Seite desselben um die dritte Ecke des zweiten."

„Ist einem Dreieck $BB_1B_2$ ein zweites $A, A_1, A_2$ eingeschrieben, und drehen sich die Seiten eines dritten Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ um die Ecken des ersten, während zwei Ecken, in bestimmter Ordnung genommen, sich in zwei Seiten des zweiten bewegen, so bewegt sich auch die dritte Ecke desselben in der dritten Seite des zweiten."

III. „Wenn von den Ecken eines Sechsecks $B_1BB_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}\mathfrak{a}B_1$ zweimal drei, die nicht aufeinander folgen, in einer Geraden liegen,

III. „Wenn von den Seiten eines Sechsecks $B_1B\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{a}_2B_1$ zweimal drei, die nicht aufeinander folgen, durch einen Punkt gehen, wie et-

wie etwa $\mathfrak{a}$, B, $\mathfrak{a}_1$ und $B_1$, $\mathfrak{e}$, $B_2$ in $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $B_1B_2$, so liegen auch die drei Durchschnitte $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}_2$ der einander gegenüber liegenden Seiten in einer Geraden."

wa $B_1B$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{a}_2$ und $B\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}_2B_1$ durch $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{a}$, so treffen sich auch die drei Geraden $B_1\mathfrak{e}$, $B\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ durch die gegenüber liegenden Ecken einander in einem Punkte $B_2$."

Von diesen zwei bekannten Sätzen (III.) ist der eine (links) das XIII. Lemma zu den Porismen des Euklides, welche Pappus im VII. Buche mittheilt. Im Anhange sollen diese Sätze umfassender gegeben werden.

Die obigen Verbindungen von drei projectivischen Geraden oder Strahlbüscheln, nebst weiteren Verbindungen der Art, würden leicht zu vielen anderen Sätzen führen, wenn der Raum gestattete, sie hier weiter zu verfolgen.

24. Es sollen hier noch drei projectivische Gerade und drei projectivische Strahlbüschel so verbunden werden, dafs von den jedesmaligen drei Gebilden zwei unter sich schief, aber jedes mit dem dritten perspectivisch liegt.

Befinden sich von den drei beliebigen Geraden A, $A_1$, $A_2$ (Fig. 31.), die unter einander projectivisch sind, zwei, etwa A, $A_1$, in schiefer, dagegen jede derselben mit der dritten $A_2$ in perspectivischer Lage, so dafs also im Durchschnitte der ersteren irgend zwei, einander nicht entsprechende Punkte, etwa $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}_1$, dagegen in den Durchschnitten, die sie mit der letzteren $A_2$ bilden, zwei entsprechende Punktenpaare, etwa $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, vereiniget sind, und sind ferner $B_1$, $B_2$ die Projectionspunkte von A und $A_2$, $A_1$ und $A_2$: so werden offenbar in der Geraden $B_1B_2$ irgend drei entsprechende Projectionsstrahlen, etwa b, $b_1$, $b_2$, aufeinander fallen, und in jeder der zwei Geraden

$B_1 l_1 l_2$, $B_2 f f_2$ werden zwei entsprechende Strahlen, nämlich $f_2 f_1$ und $f f_1$, $l_2 l$ und $l_1 l$, vereiniget sein.

a) Werden umgekehrt in irgend einem Projectionsstrahl, etwa in b, zweier gegebener projectivischer Geraden A, $A_1$, die in schiefer Lage sich befinden, zwei beliebige Punkte $B_1$, $B_2$ als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel angenommen, wovon der erstere auf A und der andere auf $A_1$ bezogen wird, und die mithin in Ansehung der Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$,..... und $a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$,..... projectivisch sind (§. 11, III.), so werden sie, da in dem Strahle b zwei entsprechende Strahlen $b_1$, $b_2$ vereiniget sind, perspectivisch liegen (§. 14.), und ihr perspectivischer Durchschnitt $A_2$ wird offenbar mit jeder der zwei gegebenen Geraden A, $A_1$ projectivisch sein und perspectivisch liegen, nämlich A und $A_2$, $A_1$ und $A_2$ werden $B_1$, $B_2$ zum Projectionspunkt haben.

b) Werden die Punkte $B_1$, $B_2$ insbesondere in zwei entsprechenden Punkten $b_1$, $b$ der gegebenen Geraden $A_1$, A angenommen, nämlich $B_1$ in $b_1$ und $B_2$ in $b$, wie (Fig. 33.), so fallen die Strahlen $e_1$, $d_2$ mit den Geraden $A_1$, A zusammen, so dafs also die Durchschnitte $e_2$, $d_1$ der entsprechenden Strahlen $e_1$ und $e_2$, $d_1$ und $d_2$ in $e_1$, $d$ liegen, und dafs folglich in diesem Falle der perspectivische Durchschnitt $A_2$ der Strahlbüschel die gegebenen Geraden $A_1$, A in denjenigen Punkten schneidet, die den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten $e$, $d_1$ entsprechen. Da die Gerade $A_2$ durch die zwei Punkte $e_1$, $d_1$, oder $e_2$, $d_2$ bestimmt ist, so bleibt also der perspectivische Durchschnitt ($A_2$) derselbe, man mag die Mittelpunkte $B_1$, $B_2$ der Strahlbüschel, in welchen zwei entsprechenden Punkten der gegebenen Geraden $A_1$, A, also in $b_1$ und $b$, oder in $a_1$ und $a$, oder in $c_1$ und $c$, u. s. w., annehmen als man will; so dafs also die Durchschnitte $a_1$, $c_2$, $f_2$,.....

der Geradenpaare $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}$, ....., die bei zwei schief liegenden projectivischen Geraden A, $A_1$ je zwei Paar entsprechende Punkte wechselseitig verbinden, in einer und derselben Geraden $A_2$ liegen.

Wenn andererseits von drei beliebigen Strahlbüscheln B, $B_1$, $B_2$ (Fig. 32.), die unter einander projectivisch sind, sich zwei, etwa B, $B_1$, in s c h i e f e r, dagegen jeder derselben mit dem dritten $B_2$ in perspectivischer Lage befinden, so dafs also in der Axe $BB_1$ der ersteren zwei einander nicht entsprechende Strahlen, etwa e, $d_1$, dagegen in jeder der zwei Axen $BB_2$, $B_1B_2$ zwei entsprechende Strahlen, etwa k und $k_2$, $l_1$ und $l_2$ vereiniget sind, und sind ferner $A_1$, $A_2$ die perspectivischen Durchschnitte der Strahlbüschel B und $B_2$, $B_1$ und $B_2$: so müssen offenbar im Durchschnitte der Geraden $A_1$, $A_2$ die Durchschnitte von irgend drei entsprechenden Strahlen, etwa die Durchschnitte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ der Strahlen b, $b_1$, $b_2$, und ferner müssen in jedem der beiden Punkte, wo die zwei Paar vereinigten entsprechenden Strahlen $kk_2$, $l_1l_2$ ihrem entsprechenden dritten Strahl $k_1$, l begegnen, zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ vereiniget sein. Und umgekehrt:

*α*) Sind irgend zwei projectivische Strahlbüschel B, $B_1$ in schiefer Lage gegeben, und man zieht durch den Durchschnitt irgend zweier entsprechenden Strahlen, z. B. durch den Durchschnitt $\mathfrak{b}$ der Strahlen b, $b_1$, zwei beliebige Gerade $A_1$, $A_2$, so werden letztere in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, ..... und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$, ....., in welchen sie die Strahlbüschel B, $B_1$ schneiden, projectivisch sein (§. 11, III.), und, da in dem Punkte $\mathfrak{b}$ zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ derselben vereiniget sind, so werden sie perspectivisch liegen (§. 14,), und ferner wird offenbar der Strahl-

büschel $B_2$, welcher durch ihre Projectionsstrahlen $a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$,..... gebildet wird, mit jedem der zwei gegebenen Strahlbüschel B, $B_1$ projectivisch sein und perspectivisch liegen, nämlich B und $B_2$, $B_1$ und $B_2$ werden die Geraden $A_1$, $A_2$ zum perspectivischen Durchschnitt haben.

$\beta$) Werden die Geraden $A_1$, $A_2$ insbesondere so gelegt, dafs sie mit den Strahlen $b_1$, b zusammenfallen, wie (Fig. 31.), so vereinigen sich, wie man sieht, die Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}_2$ mit den Mittelpunkten B, $B_1$ der gegebenen Strahlbüschel, so dafs also in diesem Falle, statt der entsprechenden Strahlen k und $k_2$, l und $l_1$, die entsprechenden Strahlen d und $d_2$, e und $e_1$ aufeinander fallen, und dafs folglich in diesem Falle der Projectionspunkt $B_2$ der Geraden $A_1$, $A_2$, der Durchschnitt derjenigen zwei Strahlen d, $e_1$ ist, deren entsprechende $d_1$, e in der Axe $BB_1$ der gegebenen Strahlbüschel B, $B_1$ vereinigt sind. Da der Punkt $B_2$ vermöge der Strahlen d, $e_1$ bestimmt ist, so bleibt also der Projectionspunkt der Geraden $A_1$, $A_2$ der nämliche, man mag diese mit welchen zwei entsprechenden Strahlen der gegebenen Strahlbüschel B, $B_1$ zusammen fallen lassen, als man will, also mit b und $b_1$, oder mit a und $a_1$, oder mit c und $c_1$, u. s. w., so dafs folglich die Geraden $a_2$, $c_2$, $f_2$,....., die durch die Punktenpaare $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$,..... gehen, in welchen bei zwei schief liegenden projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ je zwei entsprechende Strahlenpaare einander wechselseitig schneiden, in einem und demselben Punkte $B_2$ zusammentreffen.

In den vorstehenden Betrachtungen sind die Beweise und Auflösungen der nachfolgenden Sätze und Aufgaben enthalten.

I. „Bei jedem Sechseck $B_1B_2\mathfrak{k}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{l}_1B_1$ (Fig. 31.), welches zwei schief liegende projectivische Gerade $A$, $A_1$ und irgend vier Projectionsstrahlen $a$, $b$, $l$, $k$ derselben zu Seiten hat (a), treffen die drei Diagonalen $B_1\mathfrak{a}$, $B_2\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{k}\mathfrak{l}_1$, welche die gegenüber liegenden Ecken verbinden, in irgend einem Punkte $\mathfrak{a}_2$ zusammen."

I. „Bei jedem Sechseck $B\mathfrak{a}B_1\mathfrak{l}\mathfrak{b}\mathfrak{k}B$ (Fig. 32.), welches die Mittelpunkte $B$, $B_1$ zweier schief liegenden Strahlbüschel und irgend vier Durchschnitte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{k}$ entsprechender Strahlen zu Seiten hat ($\alpha$), liegen die drei Durchschnitte $\mathfrak{a}_1$, $B_2$, $\mathfrak{a}_2$ der drei Paar gegenüber liegenden Seiten, in irgend einer Geraden $a_2$."

II. „Bei zwei schief liegenden projectivischen Geraden $A$, $A_1$ (Fig. 33.) liegen die Durchschnitte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{f}_2$, ..... der verschiedenen Paar Geraden ($\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$, .....), welche je zwei Paar entsprechende Punkte wechselseitig verbinden, in einer bestimmten Geraden $A_2$, die nämlich den gegebenen Geraden $A$, $A_1$ in denjenigen zwei Punkten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$, begegnet, deren entsprechende $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$ in ihrem Durchschnitte vereiniget sind (b)."

II. „Bei zwei schief liegenden projectivischen Strahlbüscheln $B$, $B_1$ (Fig. 34.) treffen die Geraden $a_2$, $c_2$, $f_2$, ..... durch die verschiedenen Punktenpaare ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$, .....), in welchen je zwei Paar entsprechende Strahlen sich wechselseitig schneiden, in einem bestimmten Punkte $B_2$ zusammen, der nämlich mit den Mittelpunkten $B$, $B_1$ der Strahlbüschel durch diejenigen zwei Strahlen $d$, $e_1$ verbunden ist, deren entsprechende $d_1$, $e$ in ihrer Axe vereiniget sind ($\beta$)."

Die Sätze (I.) lassen sich auch umkehren. Die Sätze (II.) enthalten die obigen Sätze (§. 20, IV.) als besondere Fälle, und wie leicht zu sehen, den obigen Satz des Pappus nebst dessen entsprechenden (§. 23, III.), als Theile in sich.

III. „Zwei der Lage nach und projectivisch gegebene Gerade mittelst des Lineals allein, schief auf einander zu projiciren;" d. h.:

III. „Zwei der Lage nach und projectivisch gegebene Strahlbüschel mittelst des Lineals allein, schief auf einander zu projici-

a) „Wenn bei zwei in schiefer Lage gegebenen projectivischen Geraden $A, A_1$ eine zur Bestimmung ihrer projectivischen Beziehung hinreichende Zahl entsprechende Punktenpaare, also drei Paare, gegeben sind, so sollen mittelst des Lineals allein, andere entsprechende Punktenpaare gefunden werden, oder so soll zu jedem beliebigen Punkt in der einen Geraden der entsprechende in der anderen Geraden, und namentlich sollen b) diejenigen zwei Punkte ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$), deren entsprechende im Durchschnitte der Geraden vereiniget sind, c) die Durchschnitte der Parallelstrahlen, und endlich d) derjenige Projectionsstrahl, welcher einem der drei gegebenen Projectionsstrahlen in irgend einem gegebenen Punkte begegnet, gefunden werden."

α) „Wenn bei zwei in schiefer Lage gegebenen projectivischen Strahlbüscheln $B, B_1$ eine zur Bestimmung ihrer projectivischen Beziehung hinreichende Zahl entsprechende Strahlenpaare, also drei Paare, gegeben sind, so sollen mittelst des Lineals allein, andere entsprechende Strahlenpaare gefunden werden, oder so soll zu jedem beliebigen Strahl des einen Strahlbüschels der entsprechende im anderen Strahlbüschel, und namentlich sollen β) diejenigen zwei Strahlen ($d$, $e_1$), deren entsprechende in der Axe $BB_1$ der Strahlbüschel vereiniget sind, und ferner γ) derjenige Durchschnitt irgend zweier entsprechenden Strahlen, welcher in irgend einer Geraden liegt, die durch den Durchschnitt eines der drei gegebenen entsprechenden Strahlenpaare geht, gefunden werden."

Auflösung. 1) Sind $A, A_1$ (Fig. 31.) die gegebenen Geraden, und sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ die drei Paar gegebenen entsprechenden Punkte, so nehme man in einem der drei Projectionsstrahlen a, b, c, etwa in b, zwei beliebige Punkte $B_1$, $B_2$, ziehe aus ihnen die Strahlenpaare $B_1\mathfrak{a}$ und $B_2\mathfrak{a}_1$, $B_1\mathfrak{c}$ und $B_2\mathfrak{c}_1$, die sich in den Punkten $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_2$ schneiden, und ziehe durch diese Punkte die Gerade $A_2$. Soll nun a) zu irgend einem Punkte $\mathfrak{x}$ in der Geraden A der

entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ in der Geraden $A_1$ gefunden werden, so ziehe man den Strahl $B_1\mathfrak{x}$, der die Gerade $A_2$ in einem Punkte $\mathfrak{x}_2$ schneiden wird, und ziehe sodann aus $B_2$ durch $\mathfrak{x}_2$ einen Strahl $B_2\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1$, so wird dieser der Geraden $A_1$ in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{x}_1$ begegnen. b) Zieht man also die Strahlen $B_1\mathfrak{e}$, $B_2\mathfrak{d}_1$, und sodann durch die Punkte $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{d}_2$, in welchen sie die Gerade $A_2$ schneiden, die Strahlen $B_2\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1$, $B_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}$, so müssen diese den gegebenen Geraden $A_1$, $A$ in denjenigen Punkten $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}$ begegnen, welche den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}_1$ entsprechen. c) Und zieht man ferner durch $B_1$, $B_2$ die Strahlen q, r den Geraden $A$, $A_1$ parallel, und sodann durch die Punkte $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{r}_2$ die Strahlen $B_2\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_1$, $B_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}$, so werden diese den Geraden $A_1$, $A$ in den Durchschnitten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ der Parallelstrahlen, d. h., in denjenigen Punkten begegnen, deren entsprechende $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}_1$ unendlich entfernt sind. d) Zieht man endlich durch die Punkte $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}_1$, in welchen die gegebenen Geraden $A$, $A_1$ von der Geraden $A_2$ geschnitten werden, die Strahlen $B_2\mathfrak{f}$, $B_1\mathfrak{l}_1$, so sind diese diejenigen Projectionsstrahlen k, l (der gegebenen Geraden $A$, $A_1$), welche dem gegebenen Projectionsstrahle b in den beliebig angenommenen Punkten $B_2$, $B_1$ begegnen. 2) Nimmt man die Punkte $B_2$, $B_1$ in den entsprechenden Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ an, wie in (Fig. 33.), so wird, wie man sieht, die Auflösung für die Forderung (b) sehr vereinfacht, indem alsdann die Gerade $A_2$ selbst durch die gesuchten Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}$ geht.

1) Sind andererseits $B$, $B_1$ (Fig. 32.) die gegebenen Strahlbüschel, und a, b, c und $a_1$, $b_1$, $c_1$ die drei gegebenen entsprechenden Strahlenpaare, so ziehe man durch den Durchschnitt des einen Paars, etwa durch $\mathfrak{b}$, zwei beliebige Gerade $A_1$, $A_2$, die den übrigen gegebenen Strahlen in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_2$ begegnen,

und verbinde diese Punkte paarweise durch die Strahlen $a_2$, $c_2$, die sich in irgend einem Punkte $B_2$ schneiden werden. Soll nun α) zu irgend einem Strahl x des Strahlbüschels B der entsprechende Strahl $x_1$ im anderen Strahlbüschel $B_1$ gefunden werden, so verbinde man den Punkt $\mathfrak{x}_1$, in welchem x der Geraden $A_1$ begegnet, mit dem Punkte $B_2$ durch einen Strahl $x_2$, der die Gerade $A_2$ in einem Punkte $\mathfrak{x}_2$ schneiden wird, so wird alsdann $B_1\mathfrak{x}_2$ der gesuchte Strahl $x_1$ sein. β) Zieht man also die Axe $BB_1$, verbindet die Durchschnitte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}_2$ mit $B_2$ durch die Strahlen $e_2$, $d_2$, die den Geraden $A_2$, $A_1$ in $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{d}_1$ begegnen, und zieht sodann die Strahlen $B_1\mathfrak{e}_2$, $B\mathfrak{d}_1$, oder $e_1$, d, so sind diese diejenigen Strahlen, deren entsprechende e, $d_1$ in der Axe $BB_1$ vereiniget sind. γ) Zieht man endlich aus B, $B_1$ durch $B_2$ die Strahlen k, $l_1$, die den Geraden $A_2$, $A_1$ in den Punkten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$ begegnen, so sind diese diejenigen Durchschnitte entsprechender Strahlen (k und $k_1$, l und $l_1$, der gegebenen Strahlbüschel B, $B_1$), welche in den, durch den Durchschnitt $\mathfrak{b}$ des gegebenen Strahlenpaars b, $b_1$ beliebig gezogenen Geraden $A_2$, $A_1$ liegen. 2) Für die Forderung (β) wird die Auflösung vereinfacht, wenn man die entsprechenden Strahlen b, $b_1$ selbst, statt der Geraden $A_2$, $A_1$ nimmt, wie in (Fig. 34.), indem alsdann die gesuchten Strahlen d, $e_1$ durch den Punkt $B_2$ gehen.

IV. „Wenn bei zwei schiefliegenden projectivischen Gebilden B, A (d. h. ein Strahlbüschel B und eine Gerade A, siehe §. 6, I.) drei entsprechende Elementenpaare gegeben sind, so soll man mittelst des Lineals allein, zu irgend einem Element des einen Gebildes, das entsprechende Element des anderen Gebildes finden."

Diese Aufgabe kann leicht auf eine der vorigen Aufgaben (III.) gebracht werden. Denn schneidet man den Strahlbüschel B durch irgend eine Gerade $A_1$, so ist diese mit der gegebenen Geraden A projectivisch, und die Aufgabe ist alsdann auf die obige (III. links) gebracht. Oder man beziehe irgend einen Strahlbüschel $B_1$ auf die gegebene Gerade A, so wird derselbe mit dem Strahlbüschel B projectivisch sein, und die Aufgabe ist alsdann auf die obige (III. rechts) gebracht.

25. Aus den vorigen Betrachtungen (§. 24.) sind nur diejenigen Sätze und Aufgaben herausgehoben worden, die für spätere Untersuchungen unumgänglich erforderlich sind. Es hätten noch mehr Sätze und Aufgaben an dieselben angeschlossen werden können. Ferner würden andere Verbindungen der betrachteten projectivischen Gebilde noch viele interessante Resultate liefern, wenn nicht dieses Kapitel schon eine zu grofse Ausdehnung erlangt hätte.

Zum Schlusse dieses Kapitels soll nur noch die folgende bekannte Aufgabe gelöst werden.

„Wenn in einer Ebene zwei beliebige gleichnamige Vielecke gegeben sind, ein drittes zu beschreiben, welches dem einen umschrieben und dem anderen eingeschrieben ist." Oder: „Ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch gegebene Punkte gehen, und dessen Ecken der Reihe nach in gegebenen Geraden liegen."

Auflösung. Diese anscheinend schwere Aufgabe wird leicht auf die obige (§. 17.) gebracht, so dafs sie, sobald in der Ebene irgend ein Kreis gegeben ist, sofort mittelst des Lineals gelöst werden kann; nämlich wie folgt.

Es seien z. B. irgend vier Gerade A, $A_1$, $A_2$, $A_3$

(Fig. 35.) und irgend vier Punkte $B$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ gegeben, so soll also ein Viereck beschrieben werden, dessen Ecken, in bestimmter Ordnung genommen, in jenen Geraden liegen und dessen Seiten, nach bestimmter Ordnung, durch jene Punkte gehen.

Werden die Punkte $B$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ nach der Reihe als Projectionspunkte der Geradenpaare $A$ und $A_1$, $A_1$ und $A_2$, $A_2$ und $A_3$, $A_3$ und $A_4$ angenommen, wo nämlich $A_4$ eine mit $A$ vereinigte fünfte Gerade ist, so sind alsdann alle Gerade unter einander projectivisch, also auch $A$ und $A_4$ (§. 11, III.), und zwar so, dafs zu irgend einem Punkte $\mathfrak{a}$ in der ersten Geraden $A$, blofs durch Ziehen der Strahlen $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ in den übrigen Geraden nach der Reihe gefunden werden. Nun verlangt die Aufgabe offenbar nichts anderes, als man solle den ersten Punkt $\mathfrak{a}$ so annehmen, dafs der letzte $\mathfrak{a}_4$ mit ihm zusammentreffe. Es fallen aber bei zwei aufeinander gelegten projectivischen Geraden $A$, $A_4$, im Allgemeinen nur höchstens zwei Paar entsprechende Punkte aufeinander (§. 16, II.), folglich sind im Allgemeinen auch nur zwei Vierecke möglich, die der Aufgabe genügen. Somit ist also die Aufgabe auf die obige (§. 17.) gebracht, weil hiernach die genannten Vierecke gefunden sind, sobald man die vereinigten entsprechenden Punktenpaare ($\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_4$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_4$) der Geraden $A$, $A_4$ kennt. Um diese Punktenpaare finden zu können, ist aber nur nöthig zu irgend drei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in der Geraden $A$ die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_4$ in der Geraden $A_4$, nach der vorhin angegebenen Art, zu suchen.

Man könnte die Aufgabe auch so lösen, dafs man statt der fünften Geraden $A_4$ ein fünftes, etwa mit $B$ concentrisches, Strahlbüschel $B_4$ zu Hülfe nähme; in-

dessen wäre die Auflösung nicht so bequem, wie die vorstehende.

Es ist klar, dafs die Auflösung sich ganz ähnlich bleibt, das zu beschreibende Vieleck mag so viele Seiten haben, als man will, und dafs die Aufgabe, im Allgemeinen, nur zwei Auflösungen zulasse. Wenn aber die Rangordnung der gegebenen Punkte ($B, B_1, B_2, \ldots\ldots$) und Geraden ($A, A_1, A_2, \ldots\ldots$) nicht festgesetzt ist, dann ist die Zahl der Auflösungen viel gröfser, und vermehrt sich mit der Seitenzahl des Vielecks; so z. B. würden bei dem vorhin betrachteten Fall, wo die zu beschreibende Figur nur ein Viereck war, 576 Auflösungen statt finden *).

Die Aufgabe umfafst eine grofse Menge besonderer Fälle, deren Besonderheit z. B. darin besteht, dafs die gegebenen Punkte theilweise in Geraden liegen, oder die gegebenen Geraden theilweise durch dieselben Punkte gehen, oder dafs die gegebenen Punkte oder Geraden theilweise aufeinander fallen; u. s. w. Die Auflösung aller dieser Fälle ist leicht aus der vorstehenden Auflösung zu entnehmen.

Die

---

*) Es wurde schon oben (§. 19.) erwähnt, dafs durch n Punkte in einer Ebene $3.4.5 \ldots\ldots n$ verschiedene einfache n Ecke bestimmt werden. Man überzeugt sich davon wie folgt. Die Punkte lassen sich offenbar so oft in anderer Ordnung verbinden, als n Elemente sich versetzen lassen, also $1.2.3 \ldots\ldots n$ Mal. Allein je zwei Verbindungen, die einander gerade entgegengesetzt sind, d. h., wo die Rangordnung der Punkte gerade umgekehrt ist, sind offenbar nicht zwei verschiedene, sondern nur ein und dasselbe n Eck (z. B. bei fünf Punkten ist ABCDE und EDCBA ein und dasselbe Fünfeck), daher ist auch die Zahl der verschiedenen n Ecke nur halb so grofs als die Zahl der genannten Versetzungen.

Wenn nun, in Beziehung auf die oben stehende Aufgabe, die Seiten eines (einfachen) n Ecks durch n gegebene Punkte $B, B_1, B_2, \ldots\ldots B_{n-1}$ gehen sollen, so sind dabei offenbar ebenfalls

Die obige Aufgabe wurde zuerst von den Mathematikern Servois, Gergonne und Lhuilier gelöset, im II. Bde. der *Annales de Mathématiques.* Die vorstehende Auflösung ist vermöge des Umstandes: „dafs sie nur im Ziehen gerader Linien zwischen gegebenen Punktenpaaren besteht, sobald in der Ebene irgend ein Kreis gegeben ist;" unter allen mir bekannten Auflösungen die einfachste und leichteste.

---

## Zweites Kapitel.

### Von projectivischen Geraden, ebenen Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln im Raume.

---

#### Ein Ebenenbüschel verbunden mit Geraden und ebenen Strahlbüscheln.

26. In dem vorhergehenden Kapitel war der Ort der Gebilde, die betrachtet wurden, ausdrücklich auf eine Ebene beschränkt. Es bleibt demnach noch übrig diese Gebilde, nämlich projectivische Gerade und

---

3.4.5 ..... n verschiedene Rangordnungen möglich. Nun bleibt bei jedem von diesen 3.4.5 .... n verschiedenen n Ecken noch die Rangordnung frei, nach welcher die Ecken desselben in den gegebenen Geraden $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ liegen. Die Zahl dieser Ordnungen ist aber offenbar der Versetzungszahl für n Elemente (etwa für n Personen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1 \ldots\ldots$ auf n Plätzen $A, A_1, \ldots\ldots$) gleich, also $= 1.2.3 \ldots\ldots n$. Da endlich, zufolge der oben stehenden Auflösung, für eine bestimmte Rangordnung der Punkte $B, B_1, B_2, \ldots\ldots$ und der Geraden $A, A_1, A_2, \ldots\ldots$, im Allgemeinen, zwei Auflösungen statt finden, so ist folglich, wenn die Rangordnung weder der gegebenen Punkte $B, B_1, \ldots\ldots B_{n-1}$, noch der gegebenen Geraden $A, A_1, \ldots\ldots A_{n-1}$ festgesetzt ist, die Zahl aller Auflösungen im Allgemeinen

$$3.4.5 \ldots\ldots n \times 1.2.3.4 \ldots\ldots n \times 2 = 1^2.2^2.3^2.4^2 \ldots\ldots n^2.$$

ebene **Strahlbüschel**, in solcher Lage zu untersuchen, wo sie nicht mehr in einer und derselben Ebene liegen. Zu diesem Ende ist es zweckmäſsig, und wie sich zeigen wird, der Natur der Sache angemessen, das dritte Gebilde, nämlich den **Ebenenbüschel** (§. 1, III.), mit jenen zugleich zu betrachten.

Bei den folgenden Betrachtungen lassen sich die Gebilde und ihre verschiedenen Verbindungen, weil sie nicht mehr in einer Ebene liegen, nicht leicht durch Zeichnungen (Figuren) vorstellig machen; dieses ist aber auch nicht nöthig, weil durch zweckmäſsige Benennungen das Festhalten der Zusammenstellungen der zu betrachtenden Gebilde erleichtert wird. Ueberhaupt sind stereometrische Betrachtungen, meiner Meinung nach, nur dann richtig aufgefaſst, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden. Wenigstens ist dieses für die synthetische Betrachtungsweise erforderlich, und vorzugsweise für Denjenigen, der darin erfinderisch zu Werke gehen will; denn nur auf diesem Wege kann er seinen Gegenstand selbst gewähren lassen, kann er den ganzen Umfang der Eigenschaften einer Figuren-Verbindung in allen ihren einzelnen Fällen und nach allen ihren Grenzen hin leicht und richtig durchschauen, und alle diese Fälle zusammen als ein in einander flieſsendes oder aus sich selber heraustretendes Ganzes erkennen. Wenn auch im Anfange diese freie Vorstellung einige Mühe macht, so wird man doch bald eine gewisse Fertigkeit darin erlangen, und sich dann für die überstandene Anstrengung hinlänglich entschädiget finden. Wer bemüht wäre durch andere Mittel diese Anstrengung zu umgehen, der dürfte nicht wohl thun, indem er das Vorstellungsvermögen, statt gesund, kräf-

tig und lebensthätig zu machen, dasselbe vielmehr in dunkler, schwerfälliger Auffassung erhalten würde.

Da die folgenden Betrachtungen mit denen im vorigen Kapitel grofse Uebereinstimmung haben, ja da sie grofsentheils durch die letzteren vorbereitet sind, oder sich auf dieselben stützen, so werde ich mich dabei kürzer fassen dürfen und nur nöthig haben, die Entwickelung so weit zu verfolgen, bis sie auf frühere Betrachtungen gebracht, oder bis die weitere Untersuchung durch ein mit dem frühern ganz übereinstimmendes Verfahren, zu Ende geführt werden kann.

27. Nach der oben (§. 1, III.) gegebenen Erklärung besteht ein Ebenenbüschel aus der unzähligen Menge von Ebenen, welche durch eine und dieselbe Gerade, Axe genannt, gehen. Die Axe eines solchen beliebigen Ebenenbüschels soll durch 𝔄 bezeichnet werden, und wenn von den Ebenen desselben einzelne namhaft gemacht werden sollen, so mögen sie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ..... heifsen.

I. Denkt man sich im Raume irgend einen Ebenenbüschel 𝔄 und irgend eine Gerade A und bezieht beide auf einander, so findet man:

1) Dafs im Allgemeinen durch jeden Punkt der Geraden A eine Ebene des Ebenenbüschels 𝔄 geht. Jeder Punkt und die durch ihn gehende Ebene sollen entsprechend heifsen, und zwar sollen die den Punkten 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, ..... entsprechenden Ebenen nach der Reihe durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ..... bezeichnet werden. Nur eine Ebene ist mit der Geraden A parallel, oder geht nach ihrem unendlich entfernten Punkte; sie heifse die Parallelebene (§. 2.).

2) Insbesondere kann die Gerade A in eine solche Lage übergehen, dafs sie die Axe 𝔄 des Ebenen-

7 *

büschels schneidet, dann liegt sie in einer Ebene des letzteren, und schneidet alle übrigen Ebenen in einem und demselben Punkte, der nämlich der Durchschnitt der Geraden A und 𝔄 ist. Darunter ist auch der besondere Fall mitbegriffen, wo die Gerade A der Axe 𝔄 parallel, d. h., nach ihrem unendlich entfernten Punkte gerichtet ist.

II. Denkt man sich mit dem Ebenenbüschel 𝔄 zugleich irgend eine andere Ebene B, so finden zwischen ihnen folgende Beziehungen statt:

1) Ihr gegenseitiger Durchschnitt ist ein ebener Strahlbüschel, d. h., die Durchschnittslinien, in welchen alle Ebenen des Ebenenbüschels 𝔄 die besondere Ebene B schneiden, bilden zusammen einen Strahlbüschel B in dieser Ebene, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt der Ebene B und der Axe 𝔄 ist. Die Strahlen, oder die Durchschnittslinien, durch welche die einzelnen Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$,..... gehen, sollen nach der Reihe durch a, b, c, d,.....bezeichnet werden, und jeder Strahl und die durch ihn gehende Ebene sollen entsprechend heifsen.

2) Die Ebene B kann insbesondere ihre Lage so verändern, dafs sie der Axe 𝔄 parallel wird: dann entfernt sich der Mittelpunkt des ebenen Strahlbüschels B ins Unendliche, und alle Strahlen desselben werden parallel, nämlich der Axe 𝔄 parallel. Nähert sich in diesem Falle ferner die Ebene B der ihr parallelen Axe 𝔄, bis sie endlich diese in sich aufnimmt, so wird sie mit irgend einer Ebene des Ebenenbüschels 𝔄 zusammenfallen, und mit allen übrigen Ebenen die Axe 𝔄 zum gemeinschaftlichen Durchchnitt

haben, so daſs also der Strahlbüschel B sich auf diese Axe reduzirt.

3) Endlich kann die Ebene B auch eine solche besondere Lage haben, daſs sie zu der Axe 𝔄 senkrecht ist: dann werden durch die Winkel im Strahlbüschel B die Flächenwinkel im Ebenenbüschel 𝔄 dargestellt, d. h., der Winkel, welchen irgend zwei Strahlen des ersteren einschlieſsen, ist dem Flächenwinkel der ihnen entsprechenden Ebenen gleich, so daſs also z. B. Winkel (ab) $= (\alpha\beta)$, (ac) $= (\alpha\gamma)$, (bc) $= (\beta\gamma)$, ....., wenn nämlich der Winkel, den zwei Ebenen, etwa $\alpha, \beta$ einschlieſsen, durch $(\alpha\beta)$ bezeichnet wird.

III. Hat man auf die vorstehende Art eine Gerade A (I.) oder einen ebenen Strahlbüschel B (II.) auf einen Ebenenbüschel 𝔄 bezogen, so sollen die jedesmaligen zwei Gebilde A und 𝔄, oder B und 𝔄 „projectivisch" heiſsen, nämlich in Ansehung der entsprechenden Elementenpaare 𝔞 und $\alpha$, 𝔟 und $\beta$, 𝔠 und $\gamma$, ....., oder a und $\alpha$, b und $\beta$, c und $\gamma$, ..... Befinden sich die Gebilde in solcher Lage, daſs die Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠, .... oder die Strahlen a, b, c, ..... in den ihnen entsprechenden Ebenen $\alpha, \beta, \gamma$, ..... liegen, wie bei vorstehenden Betrachtungen, so soll gesagt werden, sie seien oder sie liegen „perspectivisch," und wenn dieses nicht der Fall ist, so soll ihre Lage „schief" heiſsen.

IV. Der Ebenenbüschel 𝔄 kann sich insbesondere so verändern, daſs seine Axe 𝔄 sich ins Unendliche entfernt, so daſs alle Ebenen $\alpha, \beta, \gamma$, ..... desselben unter sich parallel werden. Daher kann man umgekehrt irgend ein System von Parallelebenen als einen Ebenenbüschel betrachten, dessen Axe unendlich entfernt ist. Bei einem solchen Ebenenbüschel wird irgend eine

schneidende Ebene B einen ebenen Strahlbüschel hervorbringen (II.), dessen Strahlen ebenfalls parallel sind.

28. Die Geraden und die ebenen Strahlbüschel, welche mit einem und demselben Ebenenbüschel 𝔄 perspectivisch sind (§. 27.), haben unter einander folgende Beziehungen:

Je zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$ die in demselben Ebenenbüschel 𝔄 liegen, d. h., die entstehen, wenn letzterer von irgend zwei Ebenen B, $B_1$ geschnitten wird, sind in Betracht der Strahlenpaare a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, ....., die beziehlich in den Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... des Ebenenbüschels 𝔄 liegen, projectivisch, und zwar kann man sagen sie liegen perspectivisch. Denn wird die Durchschnittslinie der beiden Ebenen B, $B_1$ durch A bezeichnet, so werden, wie sich aus der Anschauung ergiebt, alle Strahlenpaare a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, ..... der Strahlbüschel B und $B_1$, sich auf der Geraden A schneiden, und heifsen diese Durchschnittspunkte, wie gehörig, 𝔞, 𝔟, 𝔠, ....., so sind einerseits B und A in Ansehung der Elemente a, b, c, ..... und 𝔞, 𝔟, 𝔠, ..... und andererseits $B_1$ und A in Ansehung der Elemente $a_1$, $b_1$, $c_1$, ..... und 𝔞, 𝔟, 𝔠, ..... projectivisch (§. 2.), folglich sind auch B und $B_1$ in Hinsicht der Elemente a, b, c, ..... und $a_1$, $b_1$, $c_1$, ..... projectivisch, und zwar, da die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen auf einer Geraden, nämlich auf A, liegen, so soll ihre Lage, obgleich sie sich nicht in einer Ebene befinden, perspectivisch heifsen, und jene Gerade A soll ihr perspectivischer Durchschnitt und die Axe 𝔄 des Ebenenbüschels ihre Projectionsaxe genannt werden. Wird also von zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln, die in einer Ebene perspectivisch liegen, wie etwa B, $B_1$ (Fig. 10.) der eine um den perspectivischen Durchschnitt A her-

umbewegt, so bleiben die Strahlbüschel fortwährend perspectivisch, und liegen, sobald sie sich nicht mehr in einer Ebene befinden, in einem Ebenenbüschel 𝔄, welcher durch sie bestimmt wird.

Wenn insbesondere die Ebenen B, $B_1$ der Axe 𝔄 des Ebenenbüschels in einem und demselben Punkte begegnen, so dafs also die ebenen Strahlbüschel B, $B_1$ concentrisch sind, so geht auch der perspectivische Durchschnitt A durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt, und zwar sind in ihm (in A) zwei entsprechende Strahlen vereiniget. Und also auch umgekehrt: Werden zwei projectivische ebene Strahlbüschel B, $B_1$ beliebig concentrisch gelegt, ohne dafs sie in einer Ebene liegen, aber dafs zwei entsprechende Strahlen zusammenfallsn, so sind sie perspectivisch, nämlich sie liegen in einem und demselben Ebenenbüschel 𝔄, der durch sie bestimmt wird, und der gemeinschaftliche Strahl ist als ihr perspectivischer Durschschnitt anzusehen.

Nun folgt ferner, dafs irgend ein ebener Strahlbüschel B und irgend eine Gerade A (die nicht in der Ebene B liegt), die in demselben Ebenenbüschel 𝔄 liegen, in Ansehung der Elemente a, b, c, d,..... und 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, ..... projectivisch sind. Denn denkt man sich irgend eine Ebene $B_1$ durch A, so bringt sie (im Ebenenbüschel 𝔄) einen ebenen Strahlbüschel $B_1$ hervor, der, wie man sieht, mit A in Ansehung der Elemente $a_1$, $b_1$, $c_1$..... und 𝔞, 𝔟, 𝔠,..... projectivisch ist, und da er, zufolge vorstehender Betrachtung, auch mit B projectivisch ist, so sind folglich auch B und A projectivisch (§. 11, II.), wie behauptet worden.

Daher sind ferner je zwei Gerade A, $A_1$, die in demselben Ebenenbüschel 𝔄 liegen, in Ansehung der entsprechenden Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠,..... und $𝔞_1$, $𝔟_1$, $𝔠_1$ ..... projectivisch. Denn sie sind beide mit dem ebenen

Strahlbüschel B, mithin auch unter sich projectivisch. Schneiden die Geraden A, $A_1$ einander, so sind sie perspectivisch, nämlich ihr Projectionspunkt liegt in der Axe des Ebenenbüschels 𝔄, er ist der Durchschnitt dieser Axe und der Ebene, in welcher alsdann die Geraden liegen.

Das Ergebniſs der vorstehenden Betrachtungen besteht also in folgenden Eigenschaften:

I. „Je zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$, die in einem und demselben Ebenenbüschel 𝔄 liegen, sind perspectivisch, und zwar ist der Durchschnitt ihrer Ebenen ihr perspectivischer Durchschnitt." Und umgekehrt: „Haben zwei projectivische ebene Strahlbüschel B, $B_1$ einen perspectivischen Durchschnitt A, d. h., sind sie perspectivisch, so liegen sie in einem Ebenenbüschel 𝔄, der durch sie bestimmt wird, oder insbesondere in einer Ebene; wird nämlich der eine um A herumbewegt, so bleiben sie stets in irgend einem Ebenenbüschel, und fallen endlich die Ebenen beider Strahlbüschel aufeinander, so vereinigen sich alle Ebenen des Ebenenbüschels mit ihnen." „Liegen die Strahlbüschel B, $B_1$ im Ebenenbüschel 𝔄 insbesondere concentrisch, so sind im perspectivischen Durchschnitt A, der dann durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt geht, zwei entsprechende Strahlen vereiniget; und umgekehrt, sind bei zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$, die nicht in einerlei Ebene liegen, die Mittelpunkte und zwei entsprechende Strahlen vereiniget, so liegen sie in einem Ebenenbüschel 𝔄, dessen Axe 𝔄 natürlicherweise durch den gemeinsamen Mit-

telpunkt geht, und der gemeinschaftliche Strahl ist als perspectivischer Durchschnitt der Strahlbüschel anzusehen."

II. „Jede Gerade A und jeder ebene Strahlbüschel B, die in einem und demselben Ebenenbüschel 𝔄 liegen, sind projectivisch."

III. „Je zwei Gerade A, $A_1$, die in einem und demselben Ebenenbüschel 𝔄 liegen, sind projectivisch, und wenn sie sich schneiden, so sind sie perspectivisch, und ihr Projectionspunkt liegt in der Axe 𝔄 des Ebenenbüschels."

In Hinsicht ähnlicher Geraden und in Hinsicht gleicher ebener Strahlbüschel finden insbesondere folgende Eigenschaften statt:

IV. „Alle Geraden, die in demselben Ebenenbüschel 𝔄 liegen und mit einer und derselben Ebene desselben parallel gehen, sind projectivisch ähnlich." Und umgekehrt: „Alle Geraden, die in demselben Ebenenbüschel liegen und ähnlich sind, sind mit einer und derselben Ebene desselben parallel." Denn da jede Ebene des Ebenenbüschels durch entsprechende Punkte der Geraden geht, so werden, da die Geraden mit derselben Ebene parallel sind, ihre unendlich entfernten Punkte sich entsprechen (§. 27, I.), und daher folgt ihre Aehnlichkeit (§. 13, I, a.). Wenn insbesondere der Ebenenbüschel 𝔄 aus Parallelebenen besteht, wenn seine Axe unendlich entfernt ist (§. 27, IV.), so sind alle Geraden, die in einem solchen Ebenenbüschel liegen, projectivisch ähnlich, und diejenigen Geraden, die unter gleichen Winkeln zu den Ebenen geneigt sind, sind projectivisch gleich.

V. „Ebene Strahlbüschel, die in demselben

Ebenenbüschel liegen, sind projectivisch ähnlich, wenn entweder

1) ihre Ebenen parallel sind, oder
2) wenn diejenige Ebene, welche den durch die Ebenen der Strahlbüschel gebildeten Flächenwinkel hälftet, zu der Axe 𝔄 des Ebenenbüschels senkrecht ist;

und auch umgekehrt." Die Wahrheit dieses Satzes ist leicht zu erweisen, nämlich im ersten Falle (1.) sind offenbar je zwei entsprechende Strahlen der Strahlbüschel parallel, und folglich je zwei entsprechende Winkel gleich, u. s. w.

29. Da die Flächenwinkel des Ebenenbüschels 𝔄 durch irgend einen ebenen Strahlbüschel $B_1$, dessen Ebene zu der Axe 𝔄 desselben senkrecht ist, dargestellt werden (§. 27, II, 3.), und da dieser Strahlbüschel $B_1$ mit jedem anderen Strahlbüschel B, oder mit jeder Geraden A, die in dem Ebenenbüschel 𝔄 liegt, projectivisch ist (§. 28.), so hat man zwischen irgend viermal drei entsprechenden Elementen der drei projectivischen Gebilde 𝔄, B, A, etwa zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; a, b, c, d; 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 folgende Bedingungen (§. 4 und §. 10.):

$$\text{I.}\left\{\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)} &= \frac{\sin(\mathrm{a\,c})}{\sin(\mathrm{b\,c})} : \frac{\sin(\mathrm{a\,d})}{\sin(\mathrm{b\,d})} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}},\\
\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\gamma\beta)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\gamma\delta)} &= \frac{\sin(\mathrm{a\,b})}{\sin(\mathrm{c\,b})} : \frac{\sin(\mathrm{a\,d})}{\sin(\mathrm{c\,d})} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}},\\
\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\delta\beta)} : \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\delta\gamma)} &= \frac{\sin(\mathrm{a\,b})}{\sin(\mathrm{d\,b})} : \frac{\sin(\mathrm{a\,c})}{\sin(\mathrm{d\,c})} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}.
\end{aligned}\right.$$

Und umgekehrt:

II. „Sind die Elemente zweier Gebilde 𝔄 und B, oder 𝔄 und A, so einander entsprechend angenommen, dafs zwischen je vier Elementenpaaren (bei gleicher Aufeinanderfolge

der Elemente in den jedesmaligen zwei Gebilden (§. 6, γ.) oder (§. 10.)) gleiche Doppelverhältnisse statt finden, wie die vorstehenden, so sind die Gebilde projectivisch."

Daher folgt ferner.

III. „Dafs das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde 𝔄 und B, oder 𝔄 und B bestimmt sei, sobald drei Paare gegeben sind (§. 6, *α.*); und dafs, um eine projectivische Beziehung zwischen den Gebilden zu bestimmen, drei entsprechende Elementenpaare beliebig gewählt werden dürfen (§. 6, *β.*)."

Sollen, wenn bei 𝔄 und B, oder bei 𝔄 und A drei Paar entsprechende Elemente gegeben sind, andere entsprechende Elemente gefunden werden, so ist die Aufgabe leicht auf die obige (§. 6.) oder (§. 24, III.) zurückzuführen. Denn welche gegenseitige Lage die Gebilde auch haben mögen, so darf man nur einen ebenen Strahlbüschel $B_1$ oder eine Gerade $A_1$ annehmen, die mit dem Ebenenbüschel 𝔄 perspectivisch sind, und sofort zwischen $B_1$ oder $A_1$ und den gegebenen Gebilden B oder A die entsprechende Aufgabe löfen.

IV. „Liegen zwei projectivische Gebilde 𝔄 und B, oder 𝔄 und A so, dafs irgend drei Paar entsprechende Elemente zusammentreffen, d. h., dafs drei Strahlen von B, oder drei Punkte von A in den ihnen entsprechenden drei Ebenen von 𝔄 liegen, so liegen die jedesmaligen zwei Gebilde perspectivisch (§. 27.), so dafs je zwei entsprechende Elemente zusammentreffen."

| | |
|---|---|
| V. „Befinden sich zwei projectivische Gebilde 𝔄 | V. „Befinden sich zwei projectivische Gebilde 𝔄 |

nnd A in beliebiger schiefer Lage, so treffen entweder zwei, oder ein, oder kein Paar entsprechende Elemente derselben zusammen, nämlich gerade so, wie bei den Gebilden B und A (§. 16, IV.), oder wie bei zwei aufeinander gelegten projectivischen Geraden A, $A_1$ (§. 16, II.)." Denn denkt man sich mit der gegebenen Geraden A eine andere Gerade $A_1$ vereiniget, die mit dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ perspectivisch ist, so sind A und $A_1$ projectivisch, woraus sofort die Richtigkeit der Aussage folgt. Die vereinigten entsprechenden Elementenpaare der Gebilde $\mathfrak{A}$, A werden demzufolge nach (§. 17.) gefunden.

und B in schiefer Lage, und liegt der Mittelpunkt B in der Axe $\mathfrak{A}$, so fallen entweder zwei, oder ein, oder kein Paar entsprechende Elemente derselben aufeinander, nämlich gerade so, wie bei zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$, die in einer Ebene concentrisch liegen (§. 16, II.)." Denn denkt man sich in der Ebene des gegebenen Strahlbüschels B einen anderen $B_1$, welcher mit ihm concentrisch und mit $\mathfrak{A}$ perspectivisch ist, so sind B und $B_1$ projectivisch, woraus sofort die genannten Eigenschaften folgen. Die vereinigten entsprechendeu Elementenpaare der Gebilde $\mathfrak{A}$, B werden demzufolge nach (§. 17.) gefunden.

Mit Rücksicht auf (§. 8.) und (§. 12, II.) folgt insbesondere ferner (§. 28, I, II, III.):

VI. „Schneiden irgend vier Ebenen des Ebenenbüshels $\mathfrak{A}$, etwa die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, entweder irgend eine Gerade A in vier harmonischen Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, oder irgend eine Ebene B in vier harmonischen Strahlen a, b, c, d, so schneiden sie auch jede andere Gerade $A_1$ in vier harmonischen Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, und jede andere Ebene $B_1$ in vier harmonischen Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$."

Unter diesen Umständen sollen die vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ „harmonische Ebenen" heifsen, und zwar sollen auf dieselbe Weise wie bei harmonischen Punkten und harmonischen Strahlen (§. 8, I.), je zwei nicht nacheinander folgende Ebenen „zugeordnete har-

monische Ebenen" heifsen. Alsdann lassen sich fast alle Eigenschaften, die daselbst (§. 8.) von vier harmonischen Strahlen entwickelt wurden, wörtlich auf vier harmonische Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ übertragen. Ferner sind die letzten Sätze in (§. 12, II.) zu übertragen, nämlich wie folgt:

VII. „Sind in einem Ebenenbüschel 𝔄 vier harmonische Ebenen, und in einer Geraden A vier harmonische Punkte, oder in einem ebenen Strahlbüschel B vier harmonische Strahlen gegeben, so sind die Gebilde 𝔄 und A, oder 𝔄 und B in Ansehung der gegebenen Elemente, auf acht verschiedene Arten projectivisch, nämlich man kann jedes Paar zugeordnete harmonische Elemente des einen Gebildes, sowohl als dem einen oder dem anderen Paar zugeordneten harmonischen Elementen des anderen Gebildes entsprechend annehmen."

Es folgt weiter:

VIII. „Werden drei Ebenen ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) eines Ebenenbüschels 𝔄 durch irgend eine Gerade A, oder durch irgend eine Ebene B geschnitten, so ist der Ort desjenigen Punktes 𝔡 oder Strahles d, der zu den drei Durchschnittspunkten (𝔞, 𝔟, 𝔠) oder Durchschnittsstrahlen (a, b, c), der vierte harmonische Punkt oder Strahl ist, eine bestimmte vierte Ebene $\delta$ des Ebenenbüschels 𝔄, nämlich die vierte harmonische Ebene zu den drei gegebenen Ebenen."

VIII. „Gehen durch drei gegebene Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠 einer Geraden A drei Ebenen ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) eines Ebenenbüschels 𝔄 oder drei Strahlen (a, b, c) eines ebenen Strahlbüschels B, so geht die zu den drei Ebenen gehörige vierte harmonische Ebene $\delta$, oder der zu den drei Strahlen gehörige vierte harmonische Strahl d, durch einen bestimmten vierten Punkt 𝔡 der Geraden A, nämlich durch den vierten harmonischen Punkt zu den drei gegebenen Punkten."

Aus diesen letzteren Sätzen, verbunden mit (§. 20, IV.), folgt ferner:

IX. „Sind $\alpha, \beta, \gamma$ irgend drei Ebenen eines Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$, und man nimmt in der einen, etwa in $\beta$, irgend einen Punkt $\mathfrak{b}$ an, zieht aus ihm zwei beliebige Gerade A, $A_1$, die den zwei übrigen Ebenen $\alpha$, $\gamma$ in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ begegnen werden, und verbindet diese Punktenpaare wechselseitig durch Gerade ($\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$), so ist der Ort des Durchschnitts $\mathfrak{d}$ der letzteren eine bestimmte vierte Ebene $\delta$ des Ebenenbüschels, die nämlich zu jenen drei Ebenen die vierte, und zwar der $\beta$ zugeordnete, harmonische Ebene ist."

IX. „Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ irgend drei Punkte einer Geraden A, und man legt durch den einen, etwa durch $\mathfrak{b}$, irgend eine Ebene $\beta$, nimmt in dieser zwei beliebige Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ an, die mit den zwei übrigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ die Ebenenpaare $\alpha$ und $\gamma$, $\alpha_1$ und $\gamma_1$ bestimmen, und legt durch die zwei Durchschnittslinien, in denen diese Ebenenpaare sich wechselseitig ($\alpha\gamma_1$, $\gamma\alpha_1$) schneiden, eine Ebene, so geht diese stets durch einen bestimmten vierten Punkt $\mathfrak{d}$ der Geraden A, der zu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ der vierte, und zwar dem $\mathfrak{b}$ zugeordnete, harmonische Punkt ist."

Aus diesen Sätzen folgert man nach Carnot weiter:

X. „Haben irgend zwei dreiseitige Pyramiden $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, einen gemeinschaftlichen Körperwinkel $\mathfrak{b}$, so finden zwischen ihren übrigen Elementen folgende Umstände statt: heifsen die Ebenen, in denen die Grundflächen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ liegen, $\alpha$, $\gamma$, heifst der durch diese bestimmte Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, und die durch die Spitze $\mathfrak{b}$ gehende Ebene des letzteren $\beta$, so werden die Durchschnittspunkte der Diago-

X. „Haben irgend zwei dreiseitige Pyramiden $\beta\alpha\alpha_1\alpha_2$, $\beta\gamma\gamma_1\gamma_2$ eine gemeinschaftliche Grundfläche $\beta$, so finden zwischen ihren übrigen Elementen folgende Umstände statt: heifsen die Spitzen der Pyramiden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, heifst die durch diese Spitzen gehende Gerade A, und der Punkt, in welchem diese der Ebene der Grundfläche $\beta$ begegnet $\mathfrak{b}$, so gehen die drei Ebenen, welche in den drei vierflächigen Körperwinkeln $\alpha\alpha_1\gamma\gamma_1$,

nalen der drei Vierecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, die sich in den Seitenebenen des Körperwinkels $\mathfrak{b}$ befinden, in einer vierten Ebene $\delta$ des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$ liegen, und zwar sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ vier harmonische Ebenen und es sind $\alpha$ und $\gamma$, $\beta$ und $\delta$ einander zugeordnet."

$\alpha\alpha_2\gamma\gamma_2$, $\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2$ durch diejenigen gegenüber stehenden Kanten gelegt werden, in denen die ungleichnamigen Ebenen ($\alpha$, $\gamma_1$, und $\alpha_1$, $\gamma$; $\alpha$, $\gamma_2$ und $\alpha_2\gamma$; $\alpha_1$, $\gamma_2$ und $\alpha_2$, $\gamma_1$) sich schneiden, durch einen vierten Punkt $\mathfrak{d}$ der Geraden A, und zwar sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ vier harmonische Punkte."

Weitere Folgerungen, deren hier noch viele möglich sind, werden gegenwärtig übergangen; im zweiten Hefte werden einige davon, bei Gelegenheit zweckmäfsiger Anwendung, nachgeholt werden.

## Ebenenbüschel unter sich.

30. Bisher befand sich unter den Gebilden, die betrachtet wurden, nur ein einziger Ebenenbüschel, nun aber sollen mehrere zugleich berücksichtigt werden, und zwar sollen sie, auf ähnliche Weise wie früher die anderen Gebilde, aufeinander bezogen und die aus dieser Beziehung entspringenden Eigenschaften untersucht werden.

Zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, die entweder mit einer und derselben Geraden A, oder mit einem und demselben ebenen Strahlbüschel B projectivisch sind (§. 27, III.), sollen auch unter sich „projectivisch" heifsen.

Zufolge dieser Erklärung, mit Bezug auf die obigen Sätze (§. 29.), finden zwischen den entsprechenden Elementen projectivischer Ebenenbüschel nachstehende Gesetze statt.

I. Je vier entsprechende Ebenenpaare zweier projectivischer Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, etwa die Ebenen

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ erfüllen folgende Bedingungen (§. 29, I.):

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)} = \frac{\sin(\alpha_1\gamma_1)}{\sin(\beta_1\gamma_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\delta_1)}{\sin(\beta_1\delta_1)},$$

$$\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\gamma\beta)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\gamma\delta)} = \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\gamma_1\beta_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\delta_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)},$$

$$\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\delta\beta)} : \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\delta\gamma)} = \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\delta_1\beta_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\gamma_1)}{\sin(\delta_1\gamma_1)}.$$

II. Und umgekehrt:

„Sind die Ebenen zweier Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ so einander entsprechend angenommen, dafs zwischen je vier Paaren gleiche Doppelverhältnisse statt finden, wie die vorstehenden, wobei die Aufeinderfolge der Ebenen in beiden Ebenenbüscheln nothwendiger Weise übereinstimmend sein mufs (§. 10.), so sind die Ebenenbüschel projectivisch."

III. Ferner folgt:

„Das ganze System der entsprechenden Ebenenpaare zweier projectivischer Ebenenbüschel ist bestimmt, wenn irgend drei Paare gegeben sind (§. 29, III.); und will man zwei Ebenenbüschel aufeinander projectivisch beziehen, so können drei Paar entsprechende Ebenen beliebig angenommen werden."

IV. „Bei zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ entsprechen vier harmonischen Ebenen des einen auch vier harmonische Ebenen des anderen Ebenenbüschels (§. 29, IV.)."

V. Es folgt weiter (§. 11, II.):

„Dafs wenn von mehreren Gebilden — Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüscheln — in irgend einer Ordnung genommen, der Reihe nach jedes mit dem darauf folgenden pro-

projectivisch ist, so ist jedes mit jedem projectivisch."

VI. Da man die Flächenwinkel zweier projectivischen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ durch zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$ darstellen kann (§. 27, II. 3.), und da letztere unter sich projectivisch sind (§. IV.), weil sie es mit jenen, und jene unter sich es sind, so folgt ferner (§. 9, II.):

„In zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ befinden sich, im Allgemeinen, nur zwei entsprechende rechte Flächenwinkel $(\sigma\tau)$, $(\sigma_1\tau_1)$."

Diese Ebenenpaare $\sigma$ und $\sigma_1$, $\tau$ und $\tau_1$ haben ferner die nachstehende Eigenthümlichkeit (§. 12, I.):

$$\operatorname{tg}(\alpha\sigma) \, . \operatorname{tg}(\alpha_1\tau_1) = \operatorname{tg}(\beta\sigma) \, . \operatorname{tg}(\beta_1\tau_1), \text{ und}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\tau) \, . \operatorname{tg}(\alpha_1\sigma_1) = \operatorname{tg}(\beta\tau) \, . \operatorname{tg}(\beta_1\sigma_1);$$

das heifst: „Bei zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ ist das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Ebenen ($\alpha$ und $\alpha_1$, oder $\beta$ und $\beta_1$) mit den ungleichnamigen Seitenflächen (mit $\sigma$ und $\tau_1$, oder $\sigma_1$ und $\tau$) der entsprechenden rechten Flächenwinkel einschliefsen, von unveränderlichem Werth."

31. In Hinsicht der gegenseitigen Lage zweier projectivischen Ebenenbüschel finden ähnliche Fälle und Umstände statt, wie bei den früher betrachteten Gebilden, nämlich folgende.

I. Zwei projectivische Ebenenbüschel sollen, oder ihre Lage soll „perspectivisch" heifsen, wenn die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare einen ebenen Strahlbüschel bilden. Um sich von der Möglichkeit dieser Lage zu überzeugen, denke man sich einen beliebigen ebenen Strahlbüschel B, lege durch dessen Mittelpunkt B irgend zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ (die

nicht in der Ebene B liegen), so sind die Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$, in Ansehung der Ebenenpaare, welche durch denselben Strahl des Strahlbüschels B gehen, projectivisch (§. 30.), und der Erklärung gemäfs liegen sie perspectivisch.

Ferner soll der Strahlbüschel B, oder dessen Ebene B, der „perspectivische Durchschnitt" der Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$ heifsen. Insbesondere kann der Strahlbüschel B aus einem System von Parallelstrahlen bestehen, und dann sind auch die Axen 𝔄, $𝔄_1$ denselben, also auch der Ebene B, parallel.

Als ein wesentlicher Umstand bei der perspectivischen Lage ist noch der zu bemerken, dafs offenbar zwei entsprechende Ebenen, etwa $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, auf einander fallen (§. 9, II.), nämlich in derjenigen Ebene, in welcher die beiden Axen 𝔄, $𝔄_1$ der Ebenenbüschel liegen. Dieser Umstand dient umgekehrt als Merkmal, oder als Bedingung für die perspectivische Lage der beiden Ebenenbüschel; nämlich man erkennt diese Lage vornämlich an folgenden zwei Merkmalen:

„Zwei projectivische Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$ liegen allemal perspectivisch, wenn entweder:

1) irgend zwei entsprechende Ebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ aufeinander fallen, oder wenn
2) die drei Durchschnittslinien von irgend drei entsprechenden Ebenenpaaren in einer und derselben Ebene liegen."

Die Richtigkeit dieser Aussagen ist durch Hülfe früherer Sätze leicht zu erweisen. Denn im ersten Falle (1.) liegen die Axen 𝔄, $𝔄_1$ in der den Ebenenbüscheln gemeinschaftlichen Ebene $\varepsilon\varepsilon_1$, und müssen folglich einander in irgend einem Punkte B schneiden, oder insbesondere parallel sein. Daher mufs ferner der Durchschnitt je zweier entsprechenden Ebenen durch

den Punkt B gehen, weil offenbar beide Ebenen durch denselben gehen. Legt man nun durch zwei solche Durchschnitte, etwa durch a, b, d. h., durch die Durchschnitte der entsprechenden Ebenenpaare $\alpha$ und $\alpha_1$, $\beta$ $\beta_1$, eine Ebene B, so wird diese der Ebene $\varepsilon\varepsilon_1$ in einem bestimmten Strahl $ee_1$ begegnen und die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei Strahlbüscheln B, $B_1$ schneiden, welche projectivisch sind, und zwar, da sie die drei Strahlen a, b, $ee_1$, als sich selbst entsprechende Strahlen, gemein haben, projectivisch gleich sind und sich decken, so dafs folglich alle übrigen Durchschnitte entsprechender Ebenenpaare in der genannten Ebene B liegen. Sind insbesondere die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ parallel, so ist auch die Ebene B mit ihnen parallel. Im andern Falle (2.) mufs die Ebene, in welcher die drei Durchschnittslinien liegen, die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ schneiden, die projectivisch gleich sind und sich decken, weil sie die drei genannten Strahlen gemein haben und durch dieselben bestimmt werden, woraus denn folgt, dafs die Durchschnittslinie von je zwei entsprechenden Ebenen in jene Ebene $BB_1$ fallen mufs.

Sind insbesondere die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gleich, d. h., sind je zwei entsprechende Flächenwinkel derselben einander gleich, so giebt sich diese Eigenschaft bei der perspectivischen Lage der Gebilde durch folgende Umstände kund, nämlich entweder:

a) hälftet der perspectivische Durchschnitt B den von den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ eingeschlossenen Winkel und steht auf dessen Ebene senkrecht, oder

b) ist der perspectivische Durchschnitt B unendlich weit entfernt, so dafs je zwei entsprechende Ebenen der Ebenenbüschel parallel sind,

und umgekehrt, durch jeden dieser Umstände ist die Gleichheit der Ebenenbüschel bedingt. Sind im ersten Falle (a) insbesondere die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ parallel, so liegen sie auf entgegengesetzten Seiten des perspectivischen Durchschnitts B und sind gleich weit von ihm entfernt.

II. Ist die Lage der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ nicht perspectivisch (I.), so soll sie „schief" heifsen. Zwei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ befinden sich allemal in schiefer Lage, wenn entweder (I.):

1) ihre Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ nicht in einer Ebene liegen, oder
2) wenn drei Durchschnittslinien von irgend drei entsprechenden Ebenenpaaren nicht in einer Ebene liegen, oder
3) wenn ihre Axen in einer Ebene liegen, in der aber nicht zwei entsprechende Ebenen ($\varepsilon$, $\varepsilon_1$) vereiniget sind.

Im Allgemeinen sind bei der schiefen Lage zweier projectivischen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ folgende zwei Hauptfälle zu unterscheiden, nämlich entweder liegen ihre Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$

a) in einer Ebene, oder
b) nicht in einer Ebene.

Im Falle (a) müssen nothwendiger Weise die Axen sich in einem Punkte schneiden, der D heifsen mag, und da jede Ebene durch denselben geht, so geht folglich auch die Durchschnittslinie von je zwei entsprechenden Ebenen durch denselben. Insbesondere können die Axen sammt den genannten Durchschnittslinien parallel sein.

Im Falle (b) gehen die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare nicht mehr durch einen und denselben Punkt, wohl aber schneidet jede die beiden Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, und alle sind einem gemein-

samen Gesetze unterworfen, welches im dritten Kapitel näher untersucht werden soll.

Die Aufgabe: „Wenn bei zwei schiefliegenden projectivischen Ebenenbüscheln drei Paar entsprechende Ebenen gegeben sind, andere entsprechende Ebenenpaare zu finden, oder mit anderen Worten, die Ebenenbüschel schief aufeinander zu projiciren;" ist in beiden Fällen (a, b) leicht zu lösen, nämlich dadurch, dafs man Gerade oder ebene Strahlbüschel zu Hülfe nimmt und sofort auf ähnliche Weise verfährt, wie in (§. 24, III.). Im Falle (a) bedarf man nur einer einzigen Geraden als Hülfslinie, die nämlich drei Durchschnittslinien von irgend drei entsprechenden Ebenenpaaren schneidet (§. 51.).

Ferner ist die Aufgabe: „Zwei schiefliegende projectivische Ebenenbüschel in perspectivische Lage zu bringen;" zufolge der mit der perspectivischen Lage verbundenen Umstände (I.) leicht zu lösen.

III. Zwei projectivische Ebenenbüschel können endlich auch so liegen, dafs man ihre Lage sowohl für perspectivisch als schief halten kann, wenn nämlich ihre Axen zusammenfallen (vergl. §. 16.). In diesem Falle finden ganz ähnliche Umstände statt, wie bei zwei aufeinander gelegten projectivischen Geraden, oder bei zwei in einer Ebene liegenden concentrischen projectivischen ebenen Strahlbüscheln (§. 16, III.); denn schneidet man z. B. die gegebenen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ mit irgend einer Ebene, so entstehen zwei ebene Strahlbüschel $B$, $B_1$, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen. Daher werden bei den Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Allgemeinen zwei Paar entsprechende Ebenen aufeinander fallen, u. s. w. Und daher wird

man diese vereinigten entsprechenden Ebenenpaare nach (§. 17.) leicht finden.

## Sätze und Porismen durch Zusammenstellung projectivischer Gebilde.

32. Durch die bisherigen Betrachtungen sind die Fundamentalsätze über projectivische Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel im Raume entwickelt worden. Die weitere Betrachtung könnte sich nun mit verschiedenen Verbindungen und Zusammenstellungen der genannten Gebilde beschäftigen, wobei die gefundenen Sätze, durch Wiederholung und Verbindung, zu zusammengesetzteren Sätzen führen würden, auf ähnliche Weise wie im ersten Kapitel von (§. 19.) bis zu Ende. Allein ich werde mich hier nur auf einige wenige Verbindungen beschränken, und am Schlusse in zwei Anmerkungen zwei Reihen von leicht auszuführenden Betrachtungen kurz andeuten.

Den obigen, in (§. 22.) aufgestellten, Sätzen entsprechen hier folgende, von deren Richtigkeit man sich mittelst vorhergehender erwiesener Eigenschaften leicht überzeugen wird.

I. „Wenn von n Geraden $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, die durch denselben Punkt gehen (aber sonst beliebig liegen), der Reihe nach jede mit der darauf folgenden projectivisch ist, und mit ihr perspectivisch liegt, so sind je zwei projectivisch und liegen perspectivisch."

I. „Wenn von n Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{n-1}$ deren Axen in derselben Ebene liegen, der Reihe nach jeder mit dem darauf folgenden projectivisch ist, und mit ihm perspectivisch liegt, so sind je zwei projectivisch und liegen perspectivisch."

II. „Wenn drei projectivische Gerade $A, A_1, A_2$, durch denselben Punkt gehen, und wenn darin drei ent-

II. „Wenn die Axen dreier projectivischen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ in einer Ebene liegen, und wenn in

sprechende Punkte ($\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$) vereiniget sind, so dafs je zwei Gerade perspectivisch liegen, so liegen die drei Projectionspunkte($B, B_1, B_2$) die ihnen, paarweise genommen, zugehören, in einer Geraden $\mathfrak{A}$, oder so sind sie mit einem bestimmten Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ perspectivisch (§. 27, III.), d. h., die Ebenen $\alpha, \beta, \ldots\ldots$, welche durch je drei entsprechende Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$; ..... der Geraden bestimmt werden, bilden einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$."

dieser drei entsprechende Ebenen ($\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$) vereiniget sind, so dafs je zwei Ebenenbüschel perspectivisch liegen, so schneiden sich die drei perspectivischen Durchschnitte ($B, B_1, B_2$), die ihnen zugehören, in einer Geraden $A$, oder so sind sie zugleich mit einer bestimmten Geraden $A$ perspectivisch (§. 27, III.), d. h, die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots\ldots$, in welchen je drei entsprechende Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$; $\beta, \beta_1, \beta_2$; ..... der Ebenenbüschel sich schneiden, liegen in einer Geraden $A$."

III. „Wenn vier projectivische Gerade $A, A_1, A_2, A_3$ sich in einem Punkte schneiden, und wenn alle unter einander perspectivisch sind, so liegen von den ihnen zugehörigen sechs Projectionspunkten vier mal drei in einer Geraden, und folglich liegen alle sechs in einer Ebene, und folglich liegen vier entsprechende Punkte, etwa $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$, in dieser Ebene."

III. „Wenn vier projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$, deren Axen in einer Ebene liegen, unter einander perspectivisch sind, so schneiden sich von den ihnen zugehörigen sechs perspectivischen Durchschnitten vier mal drei in einer Geraden, und folglich schneiden sich alle sechs in einem Punkte, und folglich schneiden sich vier entsprechende Ebenen, etwa $\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, in diesem Punkte."

IV. „Bewegen sich n Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ nach der Reihe in n beliebigen festen Geraden $A, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{n-1}$, die durch denselben Punkt gehen, und drehen sich die $n-1$ Geraden ($a, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}$), welche durch die Punktenpaare $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$,

V. „Drehen sich n Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ nach der Reihe um n beliebige feste Gerade $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\ldots \mathfrak{A}_{n-1}$, die in einer Ebene liegen, und bewegen sich die $n-1$ Durchschnittslinien ($a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-2}$) der Ebenenpaare $\alpha$ und $\alpha_1$, $\alpha_1$ und $\alpha_2$, .....

..... $\mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$ gehen, nach der Reihe um n—1 feste Punkte ($B, B_1, B_2, \ldots B_{n-2}$), so dreht sich die Gerade durch je zwei jener Punkte ($\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots$) um einen festen Punkt."

$\alpha_{n-2}$ und $\alpha_{n-1}$, nach der Reihe in n—1 festen Ebenen ($B, B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$), so bewegt sich die Durchschnittslinie von je zwei jener Ebenen ($\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$) in einer festen Ebene."

Das obige Porisma des Pappus (§. 22.) ist als besonderer Fall in dem vorstehenden Satze (IV. links) enthalten, nämlich es enthält die Einschränkung, dafs die gegebenen Geraden $A, A_1, \ldots A_{n-1}$ in einer Ebene liegen.

Es möge hier, als Beispiel, noch folgende Aufgabe Platz finden, welche die obige (§. 25.) als besondern Fall in sich schliefst.

V. „Wenn im Raume irgend n Gerade $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ gegeben sind, die ein schiefes n Eck (oder n Seit) bilden (d. h., jede schneidet die darauf folgende und die letzte die erste), und wenn in jeder Ebene die durch zwei aufeinander folgende Gerade bestimmt wird, irgend ein Punkt gegeben ist, also im Ganzen n Punkte ($B, B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$), so soll ein anderes (schiefes) n Eck beschrieben werden, dessen Seiten nach der Reihe durch diese Punkte gehen, und dessen Ecken nach der Reihe in jenen Geraden liegen.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist der obigen (§. 25.) ähnlich, so dafs jeder sie ohne Schwierigkeit wird ausführen können. Ich will nur bemerken, dafs die gegenwärtige Aufgabe, im Allgemeinen, zwei Auflösungen zuläfst, weil die Rangordnung der gegebenen Elemente nicht verwechselt werden kann. Diese Beschränkung der Zahl der Auflösungen wird aufgehoben, wenn die Aufgabe in folgender Gestalt gegeben wird:

„Sind n beliebige Ebenen $B$, $B_1$, $B_2$,.....$B_{n-1}$ und in jeder irgend ein Punkt, also n Punkte $B$, $B_1$, $B_2$, .... $B_{n-1}$, gegeben, so sollen n andere Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..... $\alpha_{n-1}$ so gelegt werden, dafs sie nach der Reihe durch die Seiten des durch jene Punkte bestimmten schiefen nEcks gehen, und dafs die n Durchschnittslinien der aufeinander folgenden Ebenen, in jenen gegebenen Ebenen liegen."

---

## Erste Anmerkung.

### Von projectivischen Gebilden die in einem Strahlbüschel im Raume liegen.

**33.** Zum Schlusse dieses Kapitels ist noch eine besondere Zusammenstellung von projectivischen Gebilden, und zwar von ebenen Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln näher ins Auge zu fassen, nämlich diejenige Zusammenstellung, bei welcher die genannten Gebilde sämmtlich zu einem Strahlbüschel im Raume gehören (§. 1, V.), d. h., bei dieser Zusammenstellung haben alle ebenen Strahlbüschel einen und denselben Mittelpunkt und die Axen aller Ebenenbüschel gehen durch diesen nämlichen Punkt, welcher Mittelpunkt des Strahlbüschels im Raume heifst und durch D bezeichnet werden soll.

Unter diesen Umständen finden offenbar zwischen projectivischen ebenen Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln, die in demselben Strahlbüschel D liegen, durchweg ähnliche Beziehungen statt, wie zwischen projectivischen Geraden und ebenen Strahlbüscheln, die in derselben Ebene liegen und wovon das erste Kapitel handelt. Denn wird der Strahlbüschel D durch irgend eine Ebene, die E heifsen mag, geschnitten, so wird jeder Ebenenbüschel in ei-

nem ebenen Strahlbüschel, jeder ebene Strahlbüschel in einer Geraden, und jeder Strahl in einem Punkt geschnitten; nun können alle diese durch den Durchschnitt erzeugten Gebilde in der Ebene E als perspectivisch mit den ihnen zugehörigen Gebilden im Strahlbüschel D angesehen werden (§. 27, III.), und alsdann werden, wenn irgend zwei Gebilde in der Ebene E projectivisch sind, auch die ihnen entsprechenden Gebilde im Strahlbüschel D projectivisch sein (§. 30, IV.), und auch umgekehrt; daher werden fast alle Gesetze, Eigenschaften, Lehrsätze, Porismen, Aufgaben, u. s. w., die bei projectivischen Gebilden in der Ebene E statt finden, auch auf ähnliche Weise bei den ihnen entsprechenden Gebilden im Strahlbüschel D statt haben, so dafs nur einzelne besondere Eigenschaften und Umstände hierbei eine Ausnahme machen.

Demnach würden alle Untersuchungen, die im ersten Kapitel über Gebilde in der Ebene E durchgeführt worden, auf entsprechende Weise bei den Gebilden im Strahlbüschel D auszuführen sein; da aber diese Untersuchung, im Grunde genommen, nichts wesentlich Neues enthielte, weil sie, wie wir eben gesehen, unmittelbar aus der Untersuchung in der Ebene E abgeleitet, oder auf dieselbe zurückgeführt werden kann, so werde ich mich hier nicht länger damit aufhalten, indem es durchaus nicht schwierig ist, bei jedem vorkommenden Falle, nach den bereits gegebenen Andeutungen, sich zurecht zu finden. Ich will nur noch erinnern, dafs die Figuren in der Ebene E mit den ihnen entsprechenden Figuren im Strahlbüschel D auf gewisse Weise übereinstimmen, d. h., einem Vieleck in E entspricht ein gleichnamiger Körperwinkel in D, z. B. dem Dreieck entspricht ein dreikantiger oder dreiflächiger Körperwinkel, dem Viereck ent-

spricht ein vierkantiger Körperwinkel, u. s. w., und dem Kreise entspricht ein Kegel (zweiten Grades).

Als ein zweckmäſsiges Beispiel zur Erläuterung des Gesagten mag folgende Aufgabe dienen.

„Wenn zwei projectivische ebene Strahlbüschel $B_1$, $B_2$ in einem Strahlbüschel D perspectivisch liegen, so daſs zwei entsprechende Strahlen e, $e_1$ vereiniget sind (§. 28.), und man denkt sich den einen Strahlbüschel fest, während der andere sich um den gemeinschaftlichen Strahl herumbewegt, so ist die Frage, welche Fläche durch die Projectionsaxe 𝔄 (d. h. Axe des Ebenenbüschels, in welchem beide Strahlbüschel B, $B_1$ liegen (§. 28.)) beschrieben werde."

Man denke sich eine Ebene E, welche zu dem gemeinschaftlichen Strahle $ee_1$ senkrecht ist, so wird sie die ebenen Strahlbüschel $B_1$, $B_2$ in zwei Geraden A, $A_1$ schneiden, die unter sich perspectivisch sind, wie etwa (Fig. 7.) sie darstellt, und der Punkt B, in welchem sie die Projectionsaxe 𝔄 schneidet, ist der Projectionspunkt der Geraden A, $A_1$. Wird nun der eine Strahlbüschel, etwa $B_2$, auf die angegebene Art bewegt, so wird sich die zugehörige Gerade $A_1$ in der Ebene E um den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt $ee_1$ der Geraden drehen, und der Projectionspunkt B wird sich in einer bestimmten Kreislinie bewegen, deren Mittelpunkt r ist (§. 15.); daher wird die Projectionsaxe 𝔄 eine Kegelfläche D zweiten Grades beschreiben, die durch jenen Kreis geht, und zwar ist dieser Kegel ein schiefer, weil das aus dem Scheitel D auf die Ebene E des Kreises gefällte Loth $ee_1$ nicht den Mittelpunkt (r) des Kreises trifft. „Also beschreibt die Projectionsaxe 𝔄 eine schiefe Kegelfläche die von jeder Ebene, welche zu dem gemein-

schaftlichen Strahle $ee_1$ der Strahlbüschel $B_1$, $B_2$ senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird."

## Zweite Anmerkung.

### Von projectivischen Gebilden auf der Kugelfläche.

34. Denkt man sich eine Kugelfläche K, die den Mittelpunkt D des vorhin zu Grunde gelegten Strahlbüschels im Raume (§. 33.) zum Mittelpunkt hat, so wird dieselbe von den Gebilden, die im Strahlbüschel D liegen, wie folgt geschnitten: von jedem Strahl (a, b,.....) in einem Punkt (𝔞, 𝔟,.....); von jedem ebenen Strahlbüschel B in einem Hauptkreise (gröfsten Kreise) H, dessen Punkte den Strahlen, und dessen Abschnitte (Bogen) den Winkeln des Strahlbüschels entsprechen; von einem Ebenenbüschel 𝔄 in einem sphärischen Strahlbüschel 𝔅, d.h., in einer unzähligen Menge von Hauptkreisen, die den Ebenen des Ebenenbüschels, und deren Winkel den Winkeln der letzteren entsprechen, und die alle durch denselben Punkt 𝔅 (Durchschnittspunkt der Axe 𝔄) gehen, welcher Mittelpunkt des sphärischen Strahlbüschels heifsen soll. Werden nun irgend zwei Gebilde (H nnd 𝔅, oder H und $H_1$, oder 𝔅 und $𝔅_1$) auf der Kugelfläche K, wenn ihre entsprechenden Gebilde (B und 𝔄, oder B und $B_1$, oder 𝔄 und $𝔄_1$) im Strahlbüschel D projectivisch sind, ebenfalls projectivisch genannt, so folgt mit dieser Erklärung zugleich, dafs die wesentlichsten projectivischen Beziehungen, welche zwisehen den Gebilden im Strahlbüschel D (oder zwischen den Gebilden in der Ebene E (§. 33.)) statt finden, auch zwischen den Gebilden auf der Kugelfläche K statt haben müssen.

Wie man hieraus sieht, sind also die Betrachtungen

auf der Kugelfläche K durchaus nichts eigenthümlich Neues, sondern sie sind nur als eine besondere Beschränkung der Betrachtungen im Strahlbüschel D anzusehen. Ueberhaupt haben Untersuchungen auf der Kugelfläche selten die Wichtigkeit, die man ihnen, vermöge einer oberflächlichen Ansicht, beizulegen geneigt ist. Denn oft lassen sich dieselben aus entsprechenden Untersuchungen im Strahlbüschel D oder in der Ebene E ableiten, und viele derselben liefsen sich dann auch auf ähnliche Weise auf andere krumme Flächen übertragen. Ueber die Art und Weise, wie, im Allgemeinen, Operationen (Constructionen) auf der Kugelfläche ausgeführt werden können, werde ich später handeln. Man kann nämlich die Kugelfläche allein als Operationsfeld annehmen, oder man kann die entsprechenden Operationen im Strahlbüschel D, oder in irgend einer Ebene E ausführen, und sodann auf die Kugelfläche K übertragen. Finge man mit der Construction auf der Kugelfläche K an, so liefsen sich umgekehrt die gefundenen Resultate auf den Strahlbüschel D oder auf die Ebene E übertragen, welches aber nicht der zweckmäfsigste Gang sein möchte.

Ueber die Betrachtung projectivischer Gebilde auf der Kugelfläche will ich nur noch bemerken, dafs nur wenige von den Eigenschaften, die im ersten Kapitel an projectivischen Gebilden in der Ebene nachgewiesen worden, nicht auch auf entsprechende Weise bei jenen sich vorfinden; zu solcher Ausnahme gehören z. B. der Parallelismus der Geraden, und ihre unendlich entfernten Punkte. Dagegen sind die Eigenschaften, welche auf die projectivische Beziehung gegründet sind, auf ähnliche Weise vorhanden, wie in der Ebene E, oder wie im Strahlbüschel D. Denn da offenbar die Abschnitte (Bogen) eines Hauptkreises H gerade das Maafs

der ihnen entsprechenden (gegenüber stehenden) Winkel des zugehörigen ebenen Strahlbüschels B sind, und da die Winkel, welche die Strahlen eines sphärischen Strahlbüschels 𝔅 mit einander bilden, offenbar die nämlichen sind, welche die ihnen entsprechenden Ebenen im zugehörigen Ebenenbüschel 𝔄 einschliefsen, so mufs folglich auch bei projectivischen Gebilden auf der Kugelfläche Gleichheit der Doppelverhältnisse statt finden, wenn dazu, bei Hauptkreisen die Sinus der Bogen, und bei Strahlbüscheln (𝔅) die Sinus der von den Strahlen eingeschlossenen Winkel, genommen werden. Daher folgt z. B.: „dafs es 1) bei zwei projectivischen Hauptkreisen H, $H_1$ zwei entsprechende Abschnitte (Bogen) giebt, die Quadranten sind; 2) dafs es bei zwei projectivischen sphärischen Strahlbüscheln 𝔅, $𝔅_1$ zwei entsprechende rechte Winkel giebt; und 3) dafs es bei einem Hauptkreise H und einem Strahlbüschel 𝔅, die projectivisch sind, einen Quadranten und einen rechten Winkel giebt, die sich entsprechen; und dafs in Bezug auf diese eigenthümlichen Elemente dasselbe Gesetz statt findet, wie bei projectivischen Strahlbüscheln B, $B_1$ in der Ebene (§. 12, I, $\delta$, $\delta_1$.), oder wie bei projectivischen Ebenenbüscheln 𝔄, $𝔄_1$ (§. 30, V.)." Ferner ist bei projectivischen sphärischen Gebilden perspectivische und schiefe Lage zu unterscheiden, bei der ersteren haben zwei Hauptkreise einen Projectionspunkt, und zwei Strahlbüschel haben einen perspectivischen Durchschnitt. Aus dem obigen Beispiel (§. 33.) folgt hier der nachstehende Satz: „Wenn zwei projectivische Hauptkreise H, $H_1$, perspectivisch liegen und wenn der eine fest bleibt, während der andere sich um ihren ge-

meinschaftlichen Durchschnittspunkt herumbewegt, so bewegt sich der Projectionspunkt in einem sphärischen Kegelschnitt (d. i. der Durchschnitt eines Kegels zweiten Grades, dessen Scheitel im Mittelpunkt der Kugel liegt, mit der Kugelfläche)." — Werden zwei gleichartige projectivische sphärische Gebilde (H und $H_1$, oder 𝔅 nnd $𝔅_1$) aufeinandergelegt, so finden dabei ähnliche Umstände statt, wie bei den entsprechenden Betrachtungen in (§. 16. und §. 31, III.); ferner kann dabei eine entsprechende Aufgabe gestellt, und auf ähnliche einfache Weise (mittelst eines Kreises oder irgend eines sphärischen Kegelschnitts) gelöset werden, wie in (§. 17.), welche sodann eine eben so fruchtbare Anwendung findet, wie die letztere bei den nach ihr folgenden Betrachtungen u. s. w.

---

## Drittes Kapitel.

### Erzeugung der Linien und der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung durch projectivische Gebilde.

---

35. Bei der obigen Untersuchung projectivischer Gebilde wurde bei der schiefen Lage derselben die nähere Erforschung der Gesetze, welchen bei zwei Geraden A, $A_1$ die Projectionsstrahlen (§. 9, I.), bei zwei ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare, oder die durch entsprechende Strahlenpaare bestimmten Ebenen (wenn B, $B_1$ im Strahlbüschel D liegen (§. 33.)), und bei zwei Ebenenbüscheln 𝔄, $𝔄_1$ die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare (§. 31.) unterworfen sind, absichtlich vermieden. Diese Untersuchung soll jetzt nachgeholt

werden. Sie führt, wie man sehen wird, zu den interessantesten und fruchtbarsten Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung, oder der sogenannten Kegelschnitte, aus denen sich fast alle anderen Eigenschaften der letzteren, in einem umfassenden Zusammenhange, auf eine überraschend einfache und anschauliche Weise entwickeln lassen, nämlich sie zeigt die nothwendige Entstehung der Kegelschnitte aus den geometrischen Grundgebilden, und zwar zeigt sie dadurch zugleich eine sehr merkwürdige doppelte Erzeugung derselben durch projectivische Gebilde. Ebenso zeigt sie eine doppelte Erzeugung der geradlinigen Flächen zweiten Grades, d. h., aller derjenigen Flächen zweiten Grades, in welchen gerade Linien liegen (d. i. Kegel, Cylinder, einfaches Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid, zwei Ebenen).

Wenn man bedenkt, mit welchem Scharfsinne die Mathematiker in älterer und neuerer Zeit die Kegelschnitte erforscht, und welche fast zahllose Menge von Eigenschaften sie an denselben entdeckt haben, so ist es in der That auffallend, dafs die vorgenannten Eigenschaften so lange verborgen bleiben konnten, da doch aus ihnen, wie sich zeigen wird, fast alle bekannten Eigenschaften (nebst vielen neuen), wie aus einem Gufse hervorgehen, ja da sie gleichsam die innere Natur der Kegelschnitte vor unseren Augen aufschliefsen. Denn wenn auch Eigenschaften bekannt sind, die den genannten nahe liegen, so finden sich doch, meines Wissens, letztere nirgends bestimmt ausgesprochen, in keinem Falle aber wurde ihre Wichtigkeit erkannt, die sie durch die gegenwärtige Entwickelung, wo sie zu Fundamentalsätzen erhoben werden, erhalten, übrigens bin ich auch nicht einmal durch jene auf diese geführt worden.

Da der hier vorgestreckte Zweck die Betrachtung pro-

projectivischer Gebilde ist, so dürfen die Kegelschnitte hier noch nicht so ausführlich untersucht werden, als es mittelst der erwähnten Eigenschaften leicht geschehen könnte; sondern ich werde mich blofs auf einige wenige Entwickelungen beschränken, die entweder aus dem Gange der Betrachtung jener Gebilde nothwendig hervorgehen, oder die zur Erforschung derselben in der Folge dienlich sind. Später, nach vollendeter Durchführung der Untersuchung projectivischer Gebilde sollen alsdann die Kegelschnitte einer umfassenden Untersuchung unterworfen werden, die sich auf ihre vorerwähnte Erzeugung durch projectivische Gebilde gründen wird, wobei letztere sodann nur als untergeordnete Hülfsmittel dienen, und wodurch die vorstehenden Behauptungen sollen gerechtfertigt werden.

### Gegenseitiger Durchschnitt der Ebene und der Kegelfläche.

36. Zunächst soll hier eine kurze Betrachtung der eigentlichen Kegelschnitte, wie sich dieselben beim Kegel der unmittelbaren Anschauung darbieten, vorangeschickt und dabei vornehmlich auf einige Umstände, die für die synthetische Untersuchung derselben sehr wesentlich sind, aufmerksam gemacht werden. Nur mufs ich bemerken, dafs diese Betrachtung, genau genommen, dem zweiten Abschnitte (folgendes Heft) angehört, woselbst sie in einem umfassenderen Zusammenhange ausgeführt werden wird.

Denkt man alle diejenigen Strahlen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\ldots$ eines Strahlbüschels D, welche durch irgend eine Kreislinie K gehen, wie etwa (Fig. 36.), wo das Papier die Ebene E des Kreises vorstellen und der Punkt D über derselben liegen soll (§. 34.), so heifst die Fläche, welche von diesen Strahlen erfüllet wird, Kegelfläche,

und zwar, weil sie, so wie der Kreis, von irgend einer Geraden höchstens nur in zwei Punkten geschnitten werden kann, so heifst sie, aus Folgen dieses Umstandes, Kegelfläche vom zweiten Grade. Wenn man sich die Strahlen (oder Kanten) nicht durch den Kreis K und durch den Punkt D begrenzt, sondern vielmehr unbegrenzt vorstellt, so sieht man, dafs die Kegelfläche aus zwei gleichen Theilen M, $M_1$ besteht, die mit ihren Spitzen in dem Punkte D zusammenstofsen, so dafs dieser „Mittelpunkt" des Kegels oder der Kegelfläche genannt wird (Biot.). Ferner nennt man jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt D und durch irgend eine Tangente A des Kreises geht, Berührungsebene (berührende Ebene), weil nämlich nur ein einziger Strahl der Kegelfläche in ihr liegt, nämlich nur derjenige, welcher durch den Berührungspunkt B der genannten Tangente geht. Nun nennt man ferner die Durchschnittsfigur, welche irgend eine Ebene mit der Kegelfläche bildet, d. h., die Gesammtheit aller Punkte die sie mit ihr gemein hat, Kegelschnitt. Das Gemeinschaftliche und das Besondere oder Eigenthümliche der gesammten Schnitte eines Kegels läfst sich bequem auffassen und übersehen, wenn vorerst die Schnitte derjenigen Ebenen, welche durch den Mittelpunkt D gehen, untersucht werden. Eine solche Ebene kann sich auf drei wesentlich verschiedene Arten zum Kegel verhalten, nämlich wie folgt:

a) kein Strahl der Kegelfläche liegt in der Ebene, sondern alle werden von ihr im Punkte D geschnitten; dahin gehört also jede Ebene, die den Kreis K weder schneidet noch berührt. In Bezug auf jede solche Ebene liegen die beiden Theile M, $M_1$ des Kegels auf entgegengesetzten Seiten.

b) ein Strahl der Kegelfläche liegt in der Ebene

und alle übrigen schneidet sie im Punkte D; dahin gehören alle sogenannten Berührungsebenen des Kegels. In Bezug auf jede solche Ebene liegen die Theile M, $M_1$ des Kegels auf abwechselnden Seiten.

c) zwei Strahlen der Kegelfläche liegen in der Ebene und alle übrigen werden von ihr im Punkte D geschnitten; dahin gehört jede Ebene, die den Kreis K schneidet. Jede solche Ebene spaltet jeden Theil M, $M_1$ des Kegels in zwei Abschnitte, so daſs auf jeder Seite der Ebene zwei Abschnitte liegen, in denen zusammen alle Strahlen vorkommen, die von der Ebene geschnitten werden.

Da nun jede andere Ebene im Raume, die nicht durch den Mittelpunkt D geht, nothwendiger Weise mit irgend einer unter den vorstehenden drei Abtheilungen begriffenen Ebenen parallel ist, so wird sie, ebenso wie die letztere, die Strahlen der Kegelfläche entweder alle schneiden, oder nur einen, oder nur zwei derselben nicht in der That schneiden, sondern nach ihren unendlich entfernten Punkten gerichtet sein, d. h., mit ihnen parallel sein, diese besonderen Strahlen sind nämlich diejenigen, welche in jener durch den Mittelpunkt D gehenden Parallelebene liegen. Daher giebt es folgende drei Klassen von Kegelschnitten:

I. Jede Ebene, welche mit irgend einer unter der obigen Abtheilung (a) begriffenen Ebene parallel ist, schneidet alle Strahlen der Kegelfläche in endlicher Entfernung, und zwar schneidet sie nur einen der beiden Theile M, $M_1$ der Kegelfläche, so daſs also der Durchschnitt, wie er sich der unmittelbaren Anschauung darstellt, eine geschlossene krumme Linie ist (durch die ein Theil der Ebene ganz begrenzt wird). Ein solcher Schnitt, oder

eine solche Linie, heifst Ellipse. Die Geraden, in welchen die schneidende Ebene die Berührungsebenen des Kegels schneidet, sind sämmtlich Tangenten der Ellipse, so dafs also letztere in jedem ihrer Punkte von einer bestimmten Geraden berührt wird. Unter dieser Klasse von Kegelschnitten befinden sich insbesondere auch Kreise, wie z. B. der Kreis K, von welchem die Betrachtung ausging; ferner gehören dahin, als Grenzfälle, die Schnitte der Ebenen (a), wobei nämlich die Ellipsen sich auf den einzigen Punkt D reduziren.

II. Jede Ebene, die mit irgend einer unter (b) begriffenen Ebene parallel ist, schneidet nur einen der beiden Theile M, $M_1$ der Kegelfläche, und zwar trifft sie alle Strahlen in endlicher Entfernung bis auf denjenigen, in welchem ihre Parallelebene den Kegel berührt, und nach dessen unendlich entfernten Punkt sie gerichtet ist, so dafs also der Schnitt, wie man in der Vorstellung sieht, eine gebogene krumme Linie ist, deren beide Arme sich nach derselben Seite hin ins Unendliche erstrecken, nämlich nach demselben unendlich entfernten Punkte hinstreben, nach welchem jener besondere Strahl gerichtet ist. Ein solcher Schnitt heifst Parabel. Die Durchschnittslinien der schneidenden Ebene und der Berührungsebenen des Kegels sind Tangenten der Parabel, so dafs also letztere in jedem ihrer Punkte von einer bestimmten Geraden berührt wird; jene Berührungsebene aber, welche der schneidenden parallel ist, ist nach einer unendlich entfernten Tangente gerichtet, die nämlich dem unendlich entfernten Punkte der Parabel zugehört.

Die Schnitte der unter (b) begriffenen Ebenen

gehören als Grenzfälle hierher, nämlich bei ihnen reduziren sich die Parabeln auf die einzelnen Strahlen der Kegelfläche.

III. Jede Ebene, welche mit irgend einer unter der Abtheilung (c) begriffenen Ebene parallel ist, schneidet die mit ihr auf einerlei Seite liegenden zwei Abschnitte der Kegelfläche, und zwar schneidet sie alle Strahlen der letzteren in endlicher Entfernung, ausgenommen diejenigen zwei, welche in der Parallelebene liegen, und nach deren unendlich entfernten Punkten sie gerichtet ist, so dafs also der Schnitt, wie man sieht, aus zwei gebogenen Linien besteht, wovon beide Arme einer jeden sich ins Unendliche erstrecken, und zwar so, dafs die jedesmaligen zwei einander schief gegenüber liegenden Arme beider Linien nach entgegengesetzten Richtungen aber nach demselben unendlich entfernten Punkte hinstreben, nach welchem nämlich einer von jenen zwei besonderen Strahlen gerichtet ist; beide Linien hängen demnach durch diese unendlich entfernten Punkte zusammen, so dafs sie nur eine einzige Linie ausmachen. Eine solche Linie heifst Hyperbel. Jede Berührungsbene des Kegels erzeugt eine Tangente der Hyperbel, so dafs also die letztere in jedem ihrer Punkte von einer bestimmten Geraden berührt wird; diejenigen zwei Ebenen, welche den Kegel in den genannten zwei besonderen Strahlen berühren, erzeugen diejenigen Tangenten, die den unedlich entfernten Punkten der Hyperbel zugehören, diese Tangenten selbst befinden sich in endlicher Entfernung, vermöge ihrer besonderen Eigenschaft heifsen sie Asymptoten der Hyperbel.

Die Schnitte der unter (c) enthaltenen Ebenen

gehören, als Grenzfälle, hierher, nämlich die Hyperbel reduzirt sich dabei auf zwei Gerade, auf zwei Strahlen der Kegelfläche.

Dieses (I, II, III.) sind die drei Arten von Kegelschnitten; für die synthetische Betrachtung derselben sind die Umstände: „dafs die Ellipse keinen, die Parabel einen und die Hyperbel zwei unendlich entfernte Punkte, und dafs nur die Parabel eine unendlich entfernte Tangente hat," als einfache unterscheidende Merkmale wohl zu berücksichtigen.

Nach der obigen Anmerkung (§. 33.) folgt nun, dafs wenn Eigenschaften irgend eines Kegelschnitts aus projectivischen Gebilden entspringen, dieselben alsdann auch auf entsprechende Weise bei der Kegelfläche und also auch bei jedem anderen Kegelschnitt statt haben müssen, so dafs, wenn z. B. ein Kegelschnitt durch projectivische Gebilde erzeugt werden kann, dann auch die Kegelfläche und jeder andere Kegelschnitt aus projectivischen Gebilden entspringen mufs, und auch umgekehrt. Daher kann man, zur Erforschung solcher Eigenschaften, in vielen Fällen sich nur an den Kreis, den bekanntesten und einfachsten Kegelschnitt (aufser den erwähnten Grenzfällen) halten, welcher leicht zu behandeln ist, wie z. B. in der folgenden Betrachtung geschehen soll.

## Erzeugung der Kegelschnitte und der Kegelfläche durch projectivische Gebilde.

37. Aus der Elementargeometrie bekannte Eigenschaften des Kreises zeigen fast unmittelbar die Erzeugung desselben durch projectivische Gebilde, nämlich wie folgt.

Werden aus irgend zwei Punkten $B$, $B_1$ einer

Kreislinie M (Fig. 37.) nach allen übrigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,..... derselben Strahlen a, b, c,.....; $a_1$, $b_1$, $c_1$,..... gezogen, so bilden diese unter sich gleiche Winkel, die paarweise über denselben Bogen stehen, nämlich es ist Winkel (ab) = $(a_1 b_1)$, (ac) = $(a_1 c_1)$, (bc) = $(b_1 c_1)$,....., folglich sind die dadurch entstehenden Strahlbüschel B, $B_1$, in Ansehung der Strahlenpaare a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$,....., projectivisch gleich (§. 13, II.). Denkt man sich etwa den Punkt $\mathfrak{a}$ beweglich und läfst ihn dem Punkte B näher rücken, bis er endlich mit ihm zusammentrifft, wie $\mathfrak{e}$, so wird nothwendiger Weise der eine zugehörige Strahl e den Kreis berühren; eben so wird für den Punkt $\mathfrak{d}$, der mit $B_1$ zusammenfällt, der eine zugehörige Strahl $d_1$ den Kreis berühren, so dafs also die den vereinigten Strahlen $e_1$, d entsprechenden Strahlen e, $d_1$ den Kreis in B, $B_1$ berühren *). Die Strahlbüschel B, $B_1$ befinden sich demnach in schiefer Lage (§. 14.) und zwar sind sie, wie man sieht, gleichliegend **) (§. 13, II.).

Sind andererseits A, $A_1$ (Fig. 38.) irgend zwei Tangenten eines Kreises M, und sind q, r die ihnen parallelen Tangenten desselben, von denen sie wechselseitig in den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ getroffen werden, so wird, wie leicht zu sehen, die Gerade $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ durch den Mittelpunkt M des Kreises gehälftet, so dafs $M\mathfrak{r} = M\mathfrak{q}_1$, und es ist der Abschnitt $\mathfrak{r}\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\mathfrak{q}_1$ und der Winkel

---

*) Dieses stimmt auch damit überein, dafs die Winkel, welche die entsprechenden Strahlenpaare a und $a_1$, b und $b_1$,..... an den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$,..... unter sich bilden, alle gleich sind, und zwar gleich den Winkeln, welche die Sehne $\mathfrak{e}\mathfrak{d}$ mit den Tangenten in ihren Endpunkten bildet.

**) Dieser Umstand ist wesentlich; denn wenn die nämlichen Strahlbüschel sich in schiefer Lage befinden und ungleichliegend sind, so erzeugen sie, statt des Kreises, wie oben, die gleichseitige Hyperbel, wie man zu seiner Zeit sehen wird.

$\alpha = \alpha_1$. Ist ferner a eine beliebige andere Tangente, die jene ersteren $A, A_1$ in den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ schneidet, so bleibt, wenn man diese mit dem Mittelpunkt M des Kreises durch die Geraden $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{a}_1$ verbindet, der Winkel $\mathfrak{a}M\mathfrak{a}_1$ von unveränderlicher Gröfse, wie auch die Tangente a ihre Lage änderen mag, nämlich er (oder sein Nebenwinkel bei solchen Tangenten wie b) ist beständig $= \alpha = \alpha_1$ *), und aufserdem sind die Winkel $\beta = \beta$ und $\gamma = \gamma$, daher sind die Dreiecke $\mathfrak{a}M\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{r}M$, $M\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1$, durch Gleichheit ihrer Winkel, ähnlich, so dafs, vermöge der zwei letzteren, man hat:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{r} : \mathfrak{r}M = M\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 = M\mathfrak{r} \cdot M\mathfrak{q}_1 = M\mathfrak{r}^2 = M\mathfrak{q}_1^2$$

das heifst: das Rechteck, $\mathfrak{a}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$, unter den Abständen der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$, in welchen irgend eine Tangente a die beiden festen Tangenten $A$, $A_1$ schneidet, von den Durchschnitten $\mathfrak{r}, \mathfrak{q}_1$ der parallelen Tangenten r, q, hat eine beständige Gröfse **), nämlich gleich dem Quadrate über $M\mathfrak{r}$ oder $M\mathfrak{q}_1$. Daraus erkennet man die projectivische Beziehung der Tangenten $A$, $A_1$, in Ansehung der Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, ....., in welchen sie von den übrigen Tangenten a, b, ....., geschnitten werden (§. 12, I.), so dafs also die letzteren die Projectionsstrahlen sind, und dafs insbesondere r, q, was schon durch ihre Bezeichnung angedeutet ist (§. 9, I.), die Parallelstrahlen sind. Läfst man in der Vorstellung die Tangente a sich so bewegen, dafs der Punkt $\mathfrak{a}$ sich dem Durchschnittspunkte $\mathfrak{d}$ der festen Tangen-

---

*) Denn vermöge des Dreiecks $\mathfrak{a}M\mathfrak{a}_1$ ist $\beta + \gamma + \alpha_2 = 2R$, und vermöge des Vierecks $\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1$ ist $2\beta + 2\gamma + \alpha + \alpha_1 = 4R$, folglich ist $2\alpha_2 = \alpha + \alpha_1$, und da $\alpha = \alpha_1$, so ist $\alpha_2 = \alpha = \alpha_1$.

**) Brianchon hat diesen Satz für alle Kegelschnitte bewiesen (Memoire sur les lignes du second ordre, XXVIII. p. 27.); späterhin (§. 40, I.) folgt derselbe unmittelbar.

ten $A, A_1$ nähert, so wird gleichzeitig sein entsprechender Punkt $\mathfrak{a}_1$ dem Berührungspunkte $\mathfrak{b}_1$ der Tangente $A_1$ näher rücken, und zwar dergestalt, dafs wenn sich $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ vereiniget, dann auch $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{b}_1$ zusammenfällt. Ebenso folgt, dafs der dem Berührungspunkte $\mathfrak{e}$ der Tangente A entsprechende Punkt $\mathfrak{e}_1$, im gegenseitigen Durchschnitte der Tangenten $A, A_1$ liegt *).

Aus den beiden vorstehenden Untersuchungen folgen also nachstehende Sätze.

„Irgend zwei Tangenten $(A, A_1)$ eines Kreises sind in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projectivisch, und zwar entsprechen den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten $\mathfrak{b}, \mathfrak{e}_1$, ihre wechselseitigen Berührungspunkte $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{e}$."

„Irgend zwei Punkte $(B, B_1)$ eines Kreises sind die Mittelpunkte zweier projectivischen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Punkten der Kreislinie schneiden, und zwar entsprechen den vereinigten Strahlen $d, e_1$ die wechselseitigen Tangenten $d_1, e$ in jenen Punkten $(B, B_1)$."

38. Wie bereits oben bemerkt worden (§. 36, Ende), folgen nun aus den eben aufgestellten Sätzen vom Kreise (§. 37.), unmittelbar entsprechende Sätze vom Kegel zweiten Grades und dessen übrigen Schnitten. Denn wenn die Tangenten des Kreises K (Fig. 36.) projectivisch sind, so sind auch die ihnen zugehörigen ebenen Strahlbüschel im Strahlbüschel D, deren Ebenen den dem Kreise zugehörigen Kegel D berühren, unter sich projectivisch (§. 33.), und wenn die Strahlbüschel im

*) Dieser Umstand kann auch daraus bewiesen werden, dafs wenn man sich die Gerade $M\mathfrak{b}$ denkt, dann vermöge der rechtwinkligen, einander ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{r}M\mathfrak{b}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{e}M$ man hat $\mathfrak{r}\mathfrak{e} . \mathfrak{r}\mathfrak{b} = \mathfrak{r}M . \mathfrak{r}M$, und da $\mathfrak{r}\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1$, also auch $\mathfrak{r}\mathfrak{e} . \mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{r}M . \mathfrak{r}M$, woraus man sieht, dafs $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1$ die obige Bedingung zweier entsprechenden Punkte erfüllen.

Kreise projectivisch sind, so sind auch die ihnen zugehörigen Ebenenbüschel im Kegel unter sich projectivisch, so dafs also unmittelbar nachstehende Sätze folgen:

I. „In irgend zwei Berührungsebenen eines Kegels zweiten Grades befinden sich zwei projectivische ebene Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlenpaare nämlich in den übrigen Berührungsebenen liegen, und insbesondere entsprechen den im Durchschnitte jener Ebenen vereinigten Strahlen ($d, e_1$) diejenigen Strahlen ($d_1, e$), in welchen dieselben den Kegel berühren."

I. „Irgend zwei Strahlen einer Kegelfläche zweiten Grades sind die Axen zweier projectivischen Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenenpaare sich in den übrigen Strahlen schneiden, und insbesondere entsprechen den in der Ebene jener Strahlen vereinigten Ebenen ($\delta, \varepsilon_1$) diejenigen Ebenen ($\delta_1, \varepsilon$), welche den Kegel in denselben berühren."

Und umgekehrt:

II. „Jede zwei schiefliegende projectivische ebene Strahlbüschel B, $B_1$, die sich in demselben Strahlbüschel D befinden, erzeugen einen Kegel zweiten Grades, der ihre Ebenen berührt, d. h., die durch die entsprechenden Strahlenpaare bestimmten Ebenen, nebst den Ebenen der Strahlbüschel, sind die gesammten Berührungsebenen eines bestimmten Kegels zweiten Grades, und zwar berührt er die Ebenen (B, $B_1$) der Strahlbüschel in denjenigen Strahlen ($d_1$, e) deren entsprechende (d, $e_1$) im Durchschnitte derselben vereiniget sind."

II. „Jede zwei schiefliegende projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, die sich in demselben Strahlbüschel D befinden, erzeugen einen Kegel zweiten Grades, der durch ihre Axen geht, d. h., die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare nebst den Axen der Ebenenbüschel, sind die gesammten Strahlen eines bestimmten Kegels zweiten Grades, und zwar wird er in jenen Axen ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) von denjenigen Ebenen ($\delta_1, \varepsilon$) berührt, deren entsprechende in der durch dieselben bestimmten Ebene vereiniget sind."

Da nun zwei projectivische ebene Strahlbüschel

B, $B_1$ die in irgend zwei Berührungsebenen des Kegels liegen, von einer beliebigen Ebene E in zwei projectivischen Geraden A, $A_1$ geschnitten werden, und da zwei im Kegel liegende projectivische Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$ von jener Ebene E in zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ geschnitten werden (§.33.), so folgen also weiter, wie oben erwähnt worden, für alle Kegelsch itte nachstehende merkwürdige Sätze:

III. „Jede zwei Tangenten A, $A_1$ eines Kegelschnitts sind in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projectivisch, und zwar entsprechen den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten (𝔡, $𝔢_1$), ihre wechselseitigen Berührungspunkte ($𝔡_1$, 𝔢)."

III. „Jede zwei Punkte B, $B_1$ eines Kegelschnitts sind die Mittelpunkte zweier projectivischen ebenen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Punkten desselben schneiden, und zwar entsprechen den vereinigten Strahlen (d, $e_1$) die Tangenten ($d_1$, e) in den gegenseitigen Mittelpunkten ($B_1$, B)."

Und umgekehrt:

IV. „Jede zwei in einer Ebene schiefliegende projectivische Gerade A, $A_1$ erzeugen einen Kegelschnitt, der sie berührt, d. h., sie und alle ihre Projectionsstrahlen sind die gesammten Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts, und zwar berührt dieser die Geraden in denjenigen Punkten (𝔢, $𝔡_1$), deren entsprechende ($𝔢_1$, 𝔡) in ihrem Durchschnitte vereiniget sind."

IV. „Jede zwei in einer Ebene schiefliegende projectivische (ebene) Strahlbüschel B, $B_1$ erzeugen einen Kegelschnitt, der durch ihre Mittelpunkte geht, d. h., diese und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare, sind die gesammten Punkte eines bestimmten Kegelschnitts, und zwar wird dieser in jenen Mittelpunkten von denjenigen Strahlen (e, $d_1$) berührt, deren entsprechende ($e_1$, d) vereiniget sind."

Es darf kaum erwähnt werden, daſs zufolge der obigen zweiten Anmerkung (§. 34.), bei projectivischen

Gebilden auf der Kugelfläche entsprechende Sätze statt finden.

39. Die so eben aufgestellten neuen Sätze über den Kegel zweiten Grades und dessen Schnitte (§. 38.) sind für die Untersuchung dieser Figuren wichtiger als alle bisher bekannten Sätze über dieselben, denn sie sind die eigentlichen wahren Fundamentalsätze, weil sie nämlich so umfassend sind, dafs fast alle übrigen Eigenschaften jener Figuren auf die leichteste und klarste Weise aus ihnen folgen, und weil auch die Methode, nach der sie daraus hergeleitet werden, jede bisherige Betrachtungsweise an Einfachheit und Bequemlichkeit übertrifft. Wiewohl ich mir vorbehalte, die genannten Figuren erst späterhin ausführlich zu untersuchen, so kann ich doch nicht umhin, hier schon einige der nächsten Folgerungen aus jener Hauptquelle zu ziehen, die zur Bestätigung der eben ausgesprochenen Behauptung, als eine kleine Probe dienen mögen.

Was nämlich den weiteren Fortgang der gegenwärtigen Betrachtung betrifft, so soll nun zunächst noch auf einige besondere Umstände und Grenzfälle der erwähnten Sätze aufmerksam gemacht werden; und sodann sollen einige wesentliche Eigenschaften der Kegelschnitte (so wie des Kegels), die zum Behufe späterer Untersuchungen über projectivische Gebilde dienen, so wie auch einige Porismen aus denselben in kurzen Andeutungen entwickelt werden. Nachgehends soll zum eigentlichen Hauptgegenstande zurückgekehrt, und zwar die Erzeugnisse projectivischer Gebilde, die im Raume beliebig liegen, untersucht werden.

### Besondere Fälle.

40. Bei den obigen Sätzen (§. 38, II, u. IV.) ist zuvörderst noch anzugeben, welche verschiedene Ge-

stalten die erzeugten Figuren haben können; woran zu erkennen, zu welcher Klasse (§. 36.) der durch zwei projectivische Gebilde erzeugte Kegelschnitt gehöre, und ob durch dieselben zwei Gebilde, je nachdem sie anders liegen, ein Kegelschnitt anderer Art erzeugt werde? Für einige Fälle folgt die Antwort auf diese Fragen unmittelbar aus vorangegangenen Sätzen, für die übrigen wird sie später folgen. Folgendes läfst sich nämlich in Beziehung auf diese Fragen unmittelbar angeben.

I. Da zwei projectivisch ähnliche Gerade A, $A_1$ einen unendlich entfernten Projectionsstrahl haben, und umgekehrt dieselben ähnlich sind, wenn ihre unendlich entfernten Punkte sich entsprechen, oder wenn sie einen unendlich entfernten Projectionsstrahl haben (§. 13, I.), und da von den Kegelschnitten nur die Parabel eine unendlich entfernte Tangente hat (§. 36, II.), so folgt also (§. 38, IV.):

„Dafs zwei in einer Ebene schief liegende projectivisch ähnliche Gerade A, $A_1$ eine Parabel erzeugen." Und umgekehrt:

„Dafs je zwei Tangenten einer Parabel von allen übrigen Tangenten derselben projectivisch ähnlich geschnitten werden."

Der letztere Satz ist, mit andern Worten ausgesprochen, allgemein bekannt. Da bei zwei projectivisch ähnlichen Geraden keine Parallelstrahlen statt finden (§. 13, I.), so folgt ferner: „Dafs von den nicht unendlich entfernten Tangenten einer Parabel keine zwei parallel sein können." (Die unendlich entfernte Tangente kann als mit jeder anderen parallel angesehen werden).

Zwei beliebige projectivische Geraden A, $A_1$, die nicht ähnlich sind, können also nie eine Parabel erzeugen, wohl aber können die nämlichen zwei Geraden sowohl Ellipsen als Hyperbeln erzeugen, je nachdem die in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkte ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$) beschaffen sind, welcher Umstand später in Erwägung gezogen werden soll. Der Winkel, den die Geraden unter sich bilden, hat demnach auf die Art des Kegelschnitts keinen Einflufs, sondern nur auf dessen besondere Gestalt, so z. B. giebt es ein System von Punktenpaaren, die so beschaffen sind, dafs wenn eins derselben im Durchschnitte der Geraden vereiniget ist, alsdann die letzteren unter einem bestimmten Winkel einen Kreis erzeugen. Werden insbesondere die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen, d. h., die Punkte, deren entsprechende $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}$ unendlich entfernt sind, im Durchschnitte der Geraden vereiniget, so ist der Kegelschnitt offenbar eine Hyperbel und die Geraden sind die Asymptoten derselben (§. 36, III. u. §. 38, IV.); daher folgen unmittelbar die bekannten Eigenschaften der Hyperbel: „Dafs das Rechteck unter den Abschnitten $\mathfrak{r}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1$, oder $\mathfrak{r}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{b}_1$, ....., welche eine beliebige Tangente a, b, ..... von den Asymptoten (A, $A_1$) abschneidet, eine beständige Gröfse hat (§. 12.);" „dafs daher auch der Inhalt des Dreiecks $\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, welches die Tangente mit den Asymptoten einschliefs, constant ist," und andere Eigenschaften mehr, die später vollständig aufgezählt werden sollen.

Da die Geraden A, $A_1$ im gegenwärtigen Falle (wo sie nicht ähnlich sind) Parallelstrahlen r, q haben, so folgt also:

„Dafs sowohl bei der Ellipse als bei der

Hyperbel die Tangenten paarweise parallel sind" *).

Hierbei folgt auch unmittelbar der oben (§. 37.) in der Note erwähnte Satz von Brianchon, in Bezug auf die Durschnitte $\mathfrak{r}, \mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen, wie leicht zu sehen.

Beobachtet man die Geraden A, $A_1$ während sie allmählig aus der schiefen in die perspectivische Lage übergehen, so sieht man, dafs der Kegelschnitt zuletzt in diejenige Gerade ($ee_1$) übergeht, welche den entstehenden Projectionspunkt B mit dem Durchschnitte ($\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$) der Geraden verbindet, und zwar geht die Ellipse in das durch die Punkte ($\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$), B begrenzte Stück, die Hyperbel in die beiden übrigen (unendlichen) Stücke, und die Parabel, bei welcher der Projectionspunkt B sich ins Unendliche entfernt (§. 13, I.), in die eine Hälfte der durch den Punkt ($\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$) getheilten Geraden ($ee_1$) über.

II. So wie bei zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$, die in einer Ebene concentrisch liegen, entweder zwei, oder nur ein, oder gar kein Paar entsprechende Strahlen sich vereinigen (§. 16, II.), gleichermafsen werden, wenn die Strahlbüschel beliebig liegen, entweder zwei, oder nur ein, oder gar kein Paar entsprechende Strahlen parallel sein; denn läfst man, von jener Lage ausgehend, den einen Strahlbüschel sich so bewegen, dafs sich jeder Strahl sich selbst parallel bewegt, so hat man die letztere Lage, und die zuvor vereinigten entsprechenden Strahlenpaare werden sodann parallel sein. Sind aber zwei entsprechende Strah-

*) Diese Eigenschaft folgt auch leicht aus der obigen Betrachtung des Kegels (§. 36.), wie man im zweiten Abschnitte sehen wird.

len parallel, so zeigt dies an, dafs der erzeugte Kegelschnitt einen unendlich entfernten Punkt habe, nach welchem sie gerichtet sind, daher können dieselben zwei Strahlbüschel, im Allgemeinen, Kegelschnitte von allen drei Arten erzeugen, je nachdem sie gegen einander gerichtet sind (§. 36, u. §. 16, II.), und zwar wie folgt:

a) „Zwei gleichliegende projectivische ebene Strahlbüschel $B$, $B_1$ können Ellipsen, Parabeln, oder Hyperbeln erzeugen, je nachdem sie gegen einander gerichtet sind, nämlich innerhalb eines bestimmten Spielraums erzeugen sie nur Ellipsen, an den beiden Grenzen desselben, also in zwei bestimmten Richtungen, wo die Strahlen $g$, $g_1$, oder $h$, $h_1$ parallel sind (§. 16, II.), erzeugen sie Parabeln, und jenseits dieser Grenzen erzeugen sie nur Hyperbeln." Und

b) „Sind die Strahlbüschel ungleichliegend, so erzeugen sie nur Hyperbeln."

Da, im Falle die Strahlbüschel eine Hyperbel erzeugen, die zwei Paar parallele entsprechende Strahlen nothwendiger Weise den Asymptoten parallel sein müssen, weil sie mit diesen nach denselben unendlich entfernten Punkten gerichtet sind; und da die Hyperbel gleichseitig heifst, wenn die Asymptoten zu einander rechtwinklig sind, so folgt also: „Dafs die Strahlbüschel in beiden vorstehenden Fällen (a, b.) eine gleichseitige Hyperbel erzeugen, wenn man sie so gegen einander richtet, dafs die Schenkel ($s$ und $s_1$, $t$ und $t_1$) der entsprechenden rechten Winkel (§. 9, II.) parallel sind."

Sind insbesondere die Strahlbüschel $B$, $B_1$ gleich, so

so erzeugen sie im Falle (a) einen Kreis (§. 37.), und im Falle (b) eine gleichseitige Hyperbel.

Läfst man die beliebigen Strahlbüschel B, $B_1$ allmählig in perspectivische Lage übergehen, nämlich dadurch dafs zwei parallele entsprechende Strahlen aufeinander fallen, welches also nur von der hyperbolischen und parabolischen Lage aus geschehen kann, so sieht man, dafs der Kegelschnitt zuletzt in zwei bestimmte Gerade übergeht, wovon die eine der entstehende perspectivische Durchschnitt A und die andere der gemeinschaftliche (durch beide Mittelpunkte B, $B_1$ gehende) Strahl $BB_1$ ist. Bei der parabolischen Lage werden diese zwei Geraden parallel.

Läfst man die Strahlbüschel B, $B_1$ in concentrische Lage übergehen, so geht die Hyperbel in zwei und die Parabel in eine Gerade über, nämlich in diejenigen Geraden, in welchen entsprechende Strahlen zusammenfallen, dagegen zieht sich die Ellipse in den gemeinschaftlichen Mittelpunkt ($BB_1$) der Strahlbüschel zusammen.

III. Beim Kegel im Allgemeinen finden keine so wesentlich verschiedene Klassen statt, wie bei seinen Schnitten (§. 36.), wohl aber bei einem besondern Falle desselben, er kann nämlich, wie folgt, in Grenzfälle übergehen und besondere Gestalt erhalten.

Der von zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$, oder ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ erzeugte Kegel (§. 38, II.) ändert nothwendiger Weise seine Gestalt je nachdem die Gebilde so oder anders gegen einander gerichtet sind, er kann runder oder platter werden, und wenn insbesondere die Gebilde in perspectivische Lage kommen, so geht der Kegel in folgende Grenzfälle über: bei den Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ in zwei Ebenen, wovon die eine der perspectivische Durch-

schnitt B (§. 31.) derselben und die andere die durch beide Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehende Ebene ($\varepsilon\varepsilon_1$) ist (in welcher letzteren zwei entsprechende Ebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ vereiniget sind), und bei den Strahlbüscheln B, $B_1$ in diejenige Ebene, welche durch die Projectionsaxe A derselben und durch die Durchschnittslinie ($ee_1$) der Ebenen B, $B_1$ geht.

Läſst man die nämlichen zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ ihre Lage allmählig so änderen, bis ihre Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ parallel sind, so müssen nothwendiger Weise alle Strahlen des Kegels mit denselben parallel werden, so, daſs sich sein Mittelpunkt D ins Unendliche entfernt. In diesem besonderen Falle heiſst die erzeugte Figur nicht mehr Kegel, sondern „Cylinder," und zwar Cylinder zweiten Grades. Bei dieser besonderen Lage der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ können, ebenso wie bei zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ in einer Ebene (II.), entweder zwei, oder nur ein, oder gar kein Paar entsprechende Ebenen parallel sein (§. 31, III.), und daher kann die Cylinderfläche entweder zwei, oder nur einen, oder gar keinen unendlich entfernten Strahl haben, wodurch sich drei Klassen von Cylindern von einander unterscheiden, die nach der Reihe hyperbolische, parabolische und elliptische Cylinder heiſsen. Die Bedingungen, unter welchen die Ebenenbüschel den einen oder den anderen dieser drei Cylinder erzeugen, sind den obigen, unter welchen die ebenen Strahlbüschel B, $B_1$ den einen oder anderen der drei Kegelschnitte erzeugen (II.), ganz ähnlich. Dies gilt auch von dem besonderen Falle, wenn die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gleich sind, in welchem Falle sie nämlich entweder den sogenannten geraden, oder den gleichseitig hyperbolischen Cylinder erzeugen.

Wird der Cylinder von irgend einer Ebene E geschnitten, so werden die ihn erzeugenden Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ geschnitten, die sich nothwendiger Weise in Hinsicht paralleler entsprechender Strahlen in gleichem Falle befinden, als die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in Hinsicht paralleler entsprechender Ebenen (weil parallele Ebenen von jeder anderen Ebene in parallelen Geraden geschnitten werden), daher kann die Ebene E den ersten Cylinder nur in einer Hyperbel, den zweiten nur in einer Parabel, und den dritten nur in einer Ellipse schneiden (II.). Wird die schneidende Ebene E den Strahlen der Cylinderfläche, oder den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ parallel, so geht der Schnitt in zwei solche Strahlen über, daher folgt: „dafs zwei parallele Gerade als Grenzfall sowohl von der Hyperbel, als der Parabel, oder als der Ellipse anzusehen sind."

Andererseits kann der Cylinder nur durch solche besondere ebene Strahlbüschel B, $B_1$ erzeugt werden, die aus parallelen Strahlen bestehen. Es findet bei ihnen Aehnliches statt, wie oben bei den Geraden A, $A_1$ (I.).

Der von zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, oder von zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ (deren Strahlen parallel sind) erzeugte Cylinder geht, wenn die Gebilde in perspectivische Lage gelangen, im ersten Falle in zwei und im anderen Falle in eine Ebene über, auf dieselbe Weise wie oben der Kegel.

### Einige Eigenschaften der Kegelschnitte.

41. Wie bereits oben erwähnt (§. 39.), sollen nun einige bemerkenswerthe Sätze über die Kegelschnitte

aus den obigen Fundamentalsätzen (§. 38, III, IV.) in gedrängter Kürze entwickelt werden.

I. Da die projectivische Beziehung zweier Geraden $A, A_1$ bestimmt ist, sobald irgend drei Paar entsprechende Punkte oder irgend drei Projectionsstrahlen a, b, c gegeben sind, und da eben so die projectivische Beziehung zweier Strahlbüschel $B, B_1$ durch drei entsprechende Strahlenpaare a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, oder durch deren Durchschnitte 𝔞, 𝔟, 𝔠, bestimmt ist (§. 10, β,), so folgen unmittelbar nachstehende Sätze (§. 38, IV.):

„Durch irgend fünf Tangenten ($A, A_1$, a, b, c) ist ein Kegelschnitt bestimmt, d. h., fünf beliebige Gerade in einer Ebene können allemal von einem, aber nur von einem einzigen Kegelschnitt berührt werden."

„Durch irgend fünf Punkte ($B, B_1$, 𝔞, 𝔟, 𝔠) in einer Ebene ist ein Kegelschnitt bestimmt, d. h., fünf beliebige Punkte in einer Ebene liegen allemal in einem, aber nur in einem einzigen Kegelschnitt."

Diese Sätze finden immer statt, die gegebenen fünf Elemente mögen welche gegenseitige Lage haben als man will, wenn nämlich auch die Grenzfälle, in welche der Kegelschnitt übergehen kann (§. 40, I, II.), gestattet werden; nur in dem einzigen Falle, wo von den fünf gegebenen Geraden sich vier in einem Punkte schneiden, oder von den fünf gegebenen Punkten vier in einer Geraden liegen, ist der Kegelschnitt nicht vollkommen bestimmt. Wie bei jedem vorgelegten Falle die Gestalt oder Art des Kegelschnitts leicht zu erforschen ist, wird später gezeigt.

II. Aus (§. 24, III.) sieht man, wie, wenn irgend fünf Tangenten oder irgend fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, alsdann beliebige andere Tangenten oder beliebige andere Punkte desselben, mittelst des Lineals allein, zu finden sind.

III. Nach (§. 18.) folgt:

1. „Dafs durch irgend einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts im Allgemeinen und höchstens nur zwei Tangenten des letzteren gehen. Nämlich es gehen zwei, oder nur eine oder gar keine Tangente durch den genannten Punkt, je nachdem derselbe ausserhalb, oder in, oder innerhalb dem Kegelschnitte liegt."

1. „Dafs irgend eine Gerade in der Ebene eines Kegelschnitts den letzteren im Allgemeinen und höchstens nur in zwei Punkten schneidet. Nämlich die genannte Gerade kann den Kegelschnitt entweder in zwei Punkten schneiden, oder nur in einem Punkt treffen, d. h., ihn berühren, oder ihm gar nicht begegnen."

Diese Eigenschaft der Kegelschnitte bewirkt, dafs dieselben „Linien der zweiten Klasse"*) und „Linien der zweiten Ordnung" genannt werden. Dieselben Eigenschaften lassen sich auch, mittelst des Kegels (§. 36.), vom Kreise herleiten.

Es folgt ferner (§. 18.):

2. „Dafs und wie man, wenn fünf Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, ohne dafs er selbst gezeichnet vorliegt, die durch irgend einen Punkt gehenden Tangenten desselben blofs durch Hülfe des Lineals ziehen könne, sobald in derselben Ebene irgend ein Kreis (oder sonstiger Kegelschnitt) gegeben ist."

2. „Dafs und wie man, wenn fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, ohne dafs er selbst gezeichnet vorliegt, die in irgend einer Geraden liegenden Punkte desselben, blofs durch Hülfe des Lineals finden könne, sobald in derselben Ebene irgend ein Kreis (oder sonstiger Kegelschnitt, gegeben ist."

42. I. Da durch fünf Elemente ein Kegelschnitt bestimmt ist (§. 41, I.), so müssen zwischen sechs Ele-

*) Gergonne nennt eine Curve, an welche von irgend einem Punkte aus, höchstens n Tangenten gehen, eine Curve der n ten Classe.

menten desselben nothwendiger Weise bestimmte Beziehungen statt finden; diese Beziehungen sind zum Theil in (§. 24, I.) enthalten und lassen sich hier wie folgt übertragen (§. 38, IV.):

1. „Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Sechseck (d. h., dessen Seiten Tangenten des Kegelschnitts sind) treffen die drei Hauptdiagonalen, welche nämlich die gegenüber stehenden Ecken verbinden, in irgend einem Punkte zusammen."

1. „Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechseck (d. h., dessen Ecken im Kegelschnitte liegen) liegen die drei Durchschnittspunkte der einander gegenüber stehenden Seitenpaare, allemal in irgend einer Geraden."

Und umgekehrt:

2. „Treffen die drei Hauptdiagonalen eines Sechsecks in irgend einem Punkte zusammen, so werden seine Seiten von irgend einem bestimmten Kegelschnitte berührt."

2. „Liegen die drei Durchschnitte der gegenüber stehenden Seitenpaare eines Sechsecks in irgend einer Geraden, so liegen seine Ecken in irgend einem Kegelschnitte."

Den Satz rechts (1.) hat Pascal*) und den links Brianchon**) zuerst bekannt gemacht. Pascal nannte das betreffende Sechseck „*Hexagrammum mysticum.*" In einer Abhandlung, die verloren gegangen ist, soll er eine vollständige Behandlung der Kegelschnitte auf seinen Satz gegründet haben. Später wurde der Pascalsche Satz vornehmlich von Mac-Laurin, Robert Simson und Carnot bewiesen, und auch Schwab theilt denselben, im Anhange zu Euklides Data, insbesondere vom Kreise mit. Seit Brianchon seinen Satz entdeckt hat, erkannte man

*) In seinem *Essai sur les Coniques.*

**) Im XIII. Heft des *Journal de l'Ecole Polytechnique.*

besonders die Wichtigkeit der beiden Sätze für die Betrachtung der Kegelschnitte, und deshalb wurden sie in neuerer Zeit so häufig und verschiedenartig bewiesen, wie nur selten geometrischen Sätzen gleiche Aufmerksamkeit zu Theil ward. Namentlich haben sich damit die französischen Mathematiker Gergonne, Poncelet, Chales, Sturm, Bobillier u. a. m., der belgische Dandelin, und die deutschen Moebius und Plücker beschäftiget. Die gegenwärtige Ableitung der Sätze beleuchtet sie von einer neuen Seite, sie zeigt, dafs dieselben nicht die eigentliche Grundlage für die Untersuchung der Kegelschnitte sind, sondern dafs sie vielmehr, mit vielen andern Eigenschaften zugleich, aus einer umfassenderen Quelle, nämlich aus der Beziehung projectivischer Gebilde, sehr leicht und klar hervorgehen. Eine wesentliche Vervollständigung der beiden Sätze habe ich zuerst bekannt gemacht, im XVIII. Bd. der *Annales de Mathématiques*; dieselbe soll auch hier weiter unten (im Anhange) wiederum zum Beweise vorgelegt werden.

Die früheren Sätze (§. 23, III.) sind als Grenzfälle der vorstehenden anzusehen, wie man leicht bemerken wird (§. 40.).

Die oben stehenden Sätze (1, 2.) können auch auf eine andere Art aufgefafst und ausgesprochen werden, und zwar so, dafs statt des jedesmaligen Sechsecks, zwei Dreiecke betrachtet werden, welche durch dieselben sechs Elemente bestimmt sind, nämlich statt des umschriebenen Sechsecks diejenigen zwei Dreiecke, wovon das eine die erste, dritte und fünfte, und das andere die zweite, vierte und sechste Ecke des Sechsecks zu Ecken hat, und statt des eingeschriebenen Sechsecks diejenigen zwei Dreiecke, von denen das eine die erste, dritte und fünfte, und das andere die

zweite, vierte und sechste Seite desselben zu Seiten hat. In dieser Hinsicht lauten die Sätze wie folgt:

3. „Treffen die drei Geraden, welche die Ecken zweier in einer Ebene liegenden Dreiecke, in irgend einer Ordnung paarweise genommen, verbinden, in irgend einem Punkte zusammen, so werden die übrigen sechs Geraden, welche die Ecken des einen Dreiecks mit denen des anderen verbinden, allemal von irgend einem Kegelschnitte berührt." Und auch umgekehrt.

3. „Liegen die drei Punkte, in welchen die Seiten zweier in einer Ebene liegenden Dreiecke, in irgend einer Ordnung paarweise genommen, sich schneiden, in irgend einer Geraden, so liegen die übrigen sechs Punkte, in welchen die Seiten des einen Dreiecks die des anderen schneiden, allemal in irgend einem Kegelschnitte." Und auch umgekehrt.

II. Vermöge der Schlufsbemerkungen in den Sätzen (§. 38, IV.) folgt, dafs, wie bei der obigen Aufgabe (§. 24, III, b, $\beta$.) bei zwei schiefliegenden projectivischen Gebilden ($A$, $A_1$, oder $B$, $B_1$) die den vereinigten Elementen ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$, oder $d$, $e_1$) entsprechenden Elemente ($\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$, oder $d_1$, $e$) gefunden worden, durch dasselbe Verfahren auch:

„Wenn fünf beliebige Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, die Berührungspunkte derselben nur mit Hülfe des Lineals gefunden werden können."

„Wenn fünf beliebige Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, die Tangenten in denselben nur mit Hülfe des Lineals gefunden werden können."

Es sind darin zugleich die nachstehenden bekannten Sätze enthalten:

„Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Fünfecke treffen die Diagonalen, welche irgend zwei Eckenpaare verbinden

„Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecke liegen die Durchschnittspunkte irgend zweier Seitenpaare und der

und die Gerade, welche die jedesmalige fünfte Ecke mit dem Berührungspunkte der gegenüber stehenden Seite verbindet, einander in irgend einem Punkte."

Durchschnittspunkt, welchen die jedesmalige fünfte Seite mit der Tangente in der gegenüber stehenden Ecke bildet, allemal in irgend einer Geraden."

III. Die Sätze in (§. 24, II.) lassen sich hier, mit anderen Worten, wie folgt, wiederholen (§. 38, IV.):

1. „Bei allen einem Kegelschnitte umschriebenen Vierecken, bei welchen ein Paar gegenüber stehende Seiten in irgend zwei festen Tangenten desselben sich befinden, liegt der Durchschnittspunkt der Geraden, welche durch die gegenüber stehenden Ecken gehen (Diagonalen), in einer und derselben bestimmten Geraden, die nämlich durch die Berührungspunkte jener zwei festen Tangenten geht."

1. „Bei allen einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecken, bei welchen das eine Paar gegenüber stehende Ecken in irgend zwei festen Punkten desselben sich befinden, geht die Gerade, welche die Durchschnittspunkte der gegenüber stehenden Seiten verbindet, durch einen und denselben bestimmten Punkt, der nämlich in den zu jenen festen Punkten gehörigen Tangenten liegt (ihr Durchschnittspunkt ist)."

Diese allgemein bekannten Sätze werden kürzer, wie folgt, ausgesprochen:

2. „Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Vierecke gehen die beiden Diagonalen und die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier gegenüber stehender Seiten verbindet, durch einen und denselben Punkt."

2. „Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecke liegen die Durchschnittspunkte der gegenüber stehenden Seiten und der Durchschnitt der Tangenten in zwei gegenüber stehenden Ecken, in einer Geraden."

Oder für das vollständige Vierseit, welches durch irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts gebildet wird, und für das vollständige Viereck, welches durch ir-

gend vier Punkte eines Kegelschnitts bestimmt wird, da jedes drei einfache Vierecke (oder Vierseite) enthält (§. 19.), folgen daraus unmittelbar nachstehende Eigenschaften:

3. „**Werden irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts als ein vollständiges Vierseit und ihre vier Berührungspunkte als ein vollständiges Viereck angesehen, sind etwa** A, $A_1$, $A_2$, $A_3$ (Fig. 39.) **die vier Tangenten und** $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ **die vier Berührungspunkte, so findet zwischen denselben folgende Beziehung statt:**

**Die drei Diagonalen** $\mathfrak{bg}$, $\mathfrak{cf}$, $\mathfrak{de}$ **des vollständigen Vierseits fallen mit den drei Geraden** $\mathfrak{xy}$, $\mathfrak{xz}$, $\mathfrak{yz}$, **welche die Durchschnitte** $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ **der gegenüber stehenden Seiten des vollständigen Vierecks verbinden, zusammen.**"

**Die drei Durchschnitte** $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ **der gegenüber stehenden Seiten des vollständigen Vierecks fallen mit den drei Durchschnitten** $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ **der Diagonalen des vollständigen Vierseits zusammen.**"

Zufolge dieses Satzes kann man also, wie man sieht, sehr leicht mittelst des Lineals:

4. „**Wenn irgend vier Tangenten** A, $A_1$, $A_2$, $A_3$ **eines Kegelschnitts und der Berührungspunkt einer derselben, etwa** $\mathfrak{a}$, **gegeben sind, die Berührungspunkte** $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ **der drei übrigen Tangenten finden.**" Denn durch die vier Tangenten sind die Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gegeben, durch diese und durch $\mathfrak{a}$ werden die Strahlen d, c, b bestimmt, welche durch die gesuchten Punkte $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1$ gehen.

4. „**Wenn irgend vier Punkte** $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ **eines Kegelschnitts und die Tangente in einem derselben, etwa** A, **gegeben sind, die Tangenten** $A_1$, $A_2$, $A_3$ **in den drei übrigen Punkten finden.**" Denn durch die vier Punkte sind die Geraden $\mathfrak{xy}$, $\mathfrak{xz}$, $\mathfrak{yz}$ bestimmt, durch diese und durch A sind die Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ gegeben, welche in den gesuchten Tangenten $A_3$, $A_2$, $A_1$ liegen.

IV. Die Sätze in (II. und III.), nebst vielen anderen Sätzen, kann man, wie es einige französische Mathe-

matiker gethan haben, dadurch aus den Sätzen in (I.) ableiten, dafs man von den jedesmaligen sechs Elementen des Kegelschnitts allmählig ein oder zwei Paar, u. s. w., sich vereinigen läfst. Auf diese Weise folgen z. B., wenn man in (I, 3.) die beiden Dreiecke (sowohl links als rechts) sich allmählig so veränderen läfst, dafs die Seiten des einen zuletzt den Kegelschnitt berühren, wobei dann nothwendiger Weise die Ecken des anderen in die Berührungspunkte der Seiten des ersteren zu liegen kommen, unmittelbar nachstehende bekannte Sätze:

1. „Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Dreieck treffen die drei Geraden, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüber stehenden Seiten verbinden, in irgend einem Punkte zusammen."

1. „Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke liegen die drei Punkte, in welchen die Seiten von den Tangenten in den gegenüber stehenden Ecken geschnitten werden, in irgend einer Geraden."

Und umgekehrt:

2. „Zieht man aus den Ecken eines Dreiecks durch irgend einen Punkt drei Gerade, so begegnen diese den gegenüber stehenden Seiten in drei solchen Punkten, in welchen sie von irgend einem bestimmten Kegelschnitte berührt werden."

2. „Schneidet man die Seiten eines Dreiecks durch irgend eine Gerade, so sind die drei Geraden, welche die Durchschnitte mit den gegenüber stehenden Ecken verbinden, Tangenten irgend eines bestimmten, dem Dreiecke umschriebenen Kegelschnitts."

Man sieht, wie man vermöge dieser Sätze sehr leicht:

3. „Wenn irgend drei Tangenten eines Kegelschnitts und die Berührungspunkte zweier dersel-

3. „Wenn irgend drei Punkte eines Kegelschnitts und die Tangenten in zweien derselben gegeben sind,

ben gegeben sind, den Berührungspunkt der dritten finden kann."

die Tangente im dritten finden kann."

Die vorstehenden Sätze sind vieler Folgerungen fähig, die aber gegenwärtig nicht ausgeführt werden dürfen; später soll ein Theil davon entwickelt werden. Eine grofse Reihe von Sätzen, mit denen sie in Beziehung stehen, habe ich im ersten und zweiten Hefte des XIX. Bandes der *Annales de Mathématiques* bekannt gemacht.

43. I. Andere Beziehungen zwischen sechs gleichnamigen Elementen eines Kegelschnitts (§. 42, I.) gründen sich auf die Gleichheit der Doppelverhältnisse bei projectivischen Gebilden, und lauten wie folgt (§. 10, *α.* und §. 38, III.):

1. „Bei irgend sechs Tangenten eines Kegelschnitts werden je zwei von den jedesmaligen vier übrigen so geschnitten, dafs die Doppelverhältnisse aus den Abschnitten gleich sind." Oder

„Irgend vier feste Tangenten eines Kegelschnitts beschneiden alle übrigen Tangenten desselben nach einem und demselben Doppelverhältnifse."

1. „Bei irgend sechs Punkten eines Kegelschnitts bestimmen je zwei mit den vier übrigen solche Strahlen, dafs die Doppelverhältnisse der Sinusse der dazwischen liegenden Winkel gleich sind." Oder

„Irgend vier feste Punkte eines Kegelschnitts bestimmen mit jedem andern Punkte desselben vier Strahlen denen ein und dasselbe Doppelverhältnifs zukommt."

Und umgekehrt:

2. „Alle möglichen Geraden, welche von irgend vier festen Geraden nach einem und demselben Doppelverhältnifs geschnitten werden, sind, sammt den vier festen Geraden, Tan-

2. „Alle möglichen Punkte, welche mit irgend vier festen Punkten vier solche Strahlen bestimmen, denen ein gegebenes Doppelverhältnifs zukommt, liegen in irgend einem, durch

genten irgend eines bestimmten Kegelschnitts."

die vier festen Punkte gehenden Kegelschnitt."

Die Sätze links sind, unter anderer Form abgefafst, bekannt.

Die vielen Folgerungen, die sich aus den vorstehenden Sätzen ziehen lassen, müssen hier übergangen werden; nur der nachstehende besondere Fall soll gegenwärtig in Betracht gezogen werden.

II. Wenn bei den vorigen Sätzen die erwähnten Doppelverhältnisse den besonderen Werth = 1 haben, so dafs also die jedesmaligen betreffenden vier Elemente harmonisch sind (§. 12, II.), so lauten die Sätze insbesondere wie folgt.

1. „Schneiden vier Tangenten eines Kegelschnitts irgend eine fünfte harmonisch, so schneiden sie auch jede andere Tangente desselben ebenso."

1. „Bestimmen vier Punkte eines Kegelschnitts mit irgend einem fünften harmonische Strahlen, so thun sie mit jedem anderen Punkte desselben ein Gleiches."

Und umgekehrt:

2. „Alle Geraden, welche von irgend vier festen Geraden harmonisch geschnitten werden, berühren einen bestimmten Kegelschnitt, welcher auch von jenen festen Geraden berührt wird."

2. „Alle Punkte, welche mit irgend vier festen Punkten vier harmonische Strahlen bestimmen, liegen in einem bestimmten Kegelschnitt, der durch jene festen Punkte geht."

Die vier festen Tangenten sollen in Bezug auf den betreffenden Kegelschnitt „vier harmonische Tangenten," und umgekehrt soll der Kegelschnitt in Bezug auf das durch jene gebildete Vierseit „der eingeschriebene harmonische Kegelschnitt" genannt werden. Eben so sollen andererseits die vier festen Punkte in Bezug auf den zugehörigen Kegelschnitt „vier harmonische Punkte," und umge-

kehrt der Kegelschnitt in Bezug auf das durch die Punkte bestimmte Viereck „der umschriebene harmonische Kegelschnitt" heifsen. Um diese Eigenschaften vollständig aufzuklären, müssen hier noch folgende Betrachtungen hinzugefügt werden.

Sind A, $A_1$, $A_2$, $A_3$ (Fig. 40.) irgend vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts und ist $A_4$ eine beliebige fünfte Tangente desselben, so sind also die vier Punkte 𝔥, 𝔦, 𝔨, 𝔩, in welchen sie von jenen geschnitten wird, harmonisch. Nun sind z. B. A und $A_4$ in Ansehung der Punkte, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projectivisch, und zwar entspricht dem Punkte 𝔥 in $A_4$ der Berührungspunkt 𝔞 in A (§. 38, III.), so dafs also den vier Punkten 𝔥, 𝔦, 𝔨, 𝔩 in $A_4$ die vier Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 in A entsprechen; folglich sind auch die vier letzteren Punkte harmonisch. Gleiches folgt für die drei übrigen Tangenten $A_1$, $A_2$, $A_3$. Wenn aber sowohl 𝔠, 𝔟, 𝔞, 𝔡 als 𝔠, 𝔢, $𝔞_2$, 𝔤 harmonisch sind, so müssen die drei Geraden 𝔟𝔢, 𝔞$𝔞_2$, 𝔡𝔤 einander in einem und demselben Punkte 𝔣 treffen (§. 12, und §. 14.). Aus gleichen Gründen liegen die Berührungspunkte $𝔞_1$, $𝔞_3$ der sich zugeordneten harmonischen Tangenten $A_1$, $A_3$ mit dem Durchschnitte 𝔠 der beiden übrigen A, $A_2$ in einer Geraden 𝔠$𝔞_1𝔞_3$.

Sind andererseits B, $B_1$, $B_2$, $B_3$ (Fig. 41.) irgend vier harmonische Punkte in einem Kegelschnitte, und ist $B_4$ ein beliebiger fünfter Punkt desselben, so sind also die vier Strahlen h, i, k, l harmonisch, und da die Strahlbüschel $B_4$ und B in Ansehung der Strahlen h, i, k, l und a, b, c, d, wo nämlich a die Tangente im Mittelpunkte B ist, projectivisch sind (§. 38, III.), so sind folglich auch die vier Strahlen a, b, c, d harmonisch. Gleiches findet für die drei übrigen Punkte

$B_1$, $B_2$, $B_3$ statt. Wenn aber sowohl c, b, a, d als c, e, $a_2$, g harmonisch sind, so müssen die drei Punkte $B_1$, $\mathfrak{c}$, $B_3$ in einer Geraden liegen (§. 12, und 14.). Aus ähnlichen Gründen müssen die Tangenten $a_1$, $a_3$ in den zwei sich zugeordneten harmonischen Punkten $B_1$, $B_3$ mit der durch die zwei übrigen (zugeordneten) Punkte B, $B_2$ bestimmten Geraden c in einem Punkte $\mathfrak{r}$ zusammentreffen.

Aus dieser Betrachtung fliefst Folgendes:

3. „**Irgend vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts haben solche Beziehung zu einander, dafs** $\alpha$) **der Berührungspunkt einer jeden zu den drei Punkten, in welchen sie von den drei übrigen geschnitten wird, der vierte harmonische Punkt ist, und zwar demjenigen zugeordnet, in welchem die jedesmalige Tangente von der ihr zugeordneten geschnitten wird; und dafs** $\beta$) **die Berührungspunkte je zweier zugeordneten Tangenten und der Durchschnitt der zwei übrigen Tangenten in einer Geraden liegen.**" Und umgekehrt: $\gamma$) „**Erfüllen vier Tangenten eines Kegelschnitts eine der zwei Bedingungen** ($\alpha$), ($\beta$), **so sind sie harmonisch.**" Daher folgt weiter ($\gamma$ rechts): $\delta$) „**dafs vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts diesen in vier harmonischen Punkten berühren.**"

3. „**Irgend vier harmonische Punkte eines Kegelschnitts haben solche Beziehung zu einander, dafs** $\alpha$) **die Tangente in jedem zu den drei Strahlen, welche er mit den drei übrigen bestimmt, der vierte harmonische Strahl ist, und zwar demjenigen zugeordnet, welcher durch den, dem jedesmaligen Punkte zugeordneten Punkt geht; und dafs** $\beta$) **die Tangenten in je zweien zugeordneten Punkten und die Gerade, welche die zwei übrigen Punkte verbindet, durch einen Punkt gehen.**" Und umgekehrt: $\gamma$) „**Erfüllen vier Punkte eines Kegelschnitts eine der zwei Bedingungen** ($\alpha$), ($\beta$), **so sind sie harmonisch.**" Daher folgt weiter ($\gamma$ links): $\delta$) „**dafs vier Tangenten eines Kegelschnitts, die ihn in vier harmonischen Punkten berühren, ebenfalls harmonisch sind.**"

Mittelst dieser Eigenschaften lassen sich nachstehende Aufgaben sehr leicht lösen.

4. „Die einem gegebenen Vierseit eingeschriebenen drei harmonischen Kegelschnitte zu finden, d. h., die Punkte anzugeben, in welchen sie die gegebenen Geraden berühren."

4. „Die einem gegebenen Viereck umschriebenen drei harmonischen Kegelschnitte zu finden, d. h., die Tangenten anzugeben, von welchen sie in den gegebenen Punkten berührt werden."

Da nämlich die Seiten des gegebenen Vierseits, etwa $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ (Fig. 42.), auf drei verschiedene Arten einander zugeordnet werden können (§. 4.), nämlich entweder a) $A$ und $A_1$, $A_2$ und $A_3$, oder b) $A$ und $A_2$, $A_1$ und $A_3$, oder c) $A$ und $A_3$, $A_1$ und $A_2$, so giebt es auch drei eingeschriebene harmonische Kegelschnitte, deren Berührungspunkte unmittelbar wie folgt gefunden werden. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Durchschnitte der drei Diagonalen des Vierseits, so müssen, im Falle (a), die Berührungspunkte $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}_1$ einerseits mit $\mathfrak{g}$ (3, $\beta$.), und andererseits mit $\mathfrak{z}$ (§. 42, III.) in einer Geraden liegen, folglich müssen sie in der Geraden $\mathfrak{g}\mathfrak{z}$ liegen. Ebenso sind die zwei übrigen Berührungspunkte $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ durch die Gerade $\mathfrak{b}\mathfrak{z}$ gegeben. Aus gleichen Gründen sind im Falle (b) die beiden Paar Berührungspunkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$ mittelst der Geraden $\mathfrak{f}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{y}$ gegeben; und ebenso werden im Falle (c) die gesuchten zwei Paar Berührungspunkte $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ blofs durch Ziehen der Geraden $\mathfrak{e}\mathfrak{z}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{z}$ gefunden. — Andererseits, d. h., bei der Aufgabe rechts, werden die gesuchten Tangenten durch ein entsprechendes Verfahren gefunden, was Jeder leicht wird ausführen können.

5. „Zu irgend drei gegebenen Tangenten eines Kegelschnitts die vierte harmonische zu finden.

5. „Zu irgend drei gegebenen Punkten eines Kegelshnitts den vierten harmonischen zu finden."

Es

Es darf kaum erinnert werden, dafs die Auflösung dieser Aufgaben unmittelbar aus (3, $\beta$) folgt. Jeder Aufgabe kommen, vermöge der verschiedenen Zuordnungen, drei Auflösungen zu.

So wie zu zwei festen Punkten $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}$ in einer Geraden $A_4$ (Fig. 40.) unzählige Paare von zugeordneten harmonischen Punkten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{l}$ möglich sind (§. 8, III.), ebenso sind also auch zu irgend zwei festen Tangenten $A$, $A_2$ eines Kegelschnitts unzählige Paare von zugeordneten harmonischen Tangenten $A_1$, $A_3$ möglich, und es mufs, zufolge (3, $\beta$), der Durchschnitt $\mathfrak{f}$ eines jeden der letzteren Paare in der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ liegen, welche durch die Berührungspunkte jenes festen Tangentenpaars geht, und die verschiedenen Paare Berührungspunkte derselben müssen in Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$,..... liegen, welche sämmtlich durch den Durchschnitt $\mathfrak{c}$ der festen Tangenten gehen. Andererseits folgt Entsprechendes. Daher folgen weiter nachstehende Sätze:

6. „In Bezug auf irgend zwei Tangenten $A, A_2$ eines Kegelschnitts giebt es unzählige zugeordnete harmonische Tangentenpaare, nämlich jede zwei Tangenten ($A_1$, $A_3$), deren Durchschnitt ($\mathfrak{f}$) in derjenigen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ liegt, welche durch die Berührungspunkte jener zwei geht, sind ein solches Paar."

6. „In Bezug auf irgend zwei Punkte $B$, $B_2$ eines Kegelschnitts giebt es unzählige zugeordnete harmonische Punktenpaare, nämlich jede zwei Punkte ($B_1$, $B_3$), die in einer Geraden ($f$) liegen, welche durch den Durchschnitt der Tangenten in jenen Punkten geht, sind ein solches Paar."

Diese Sätze gestatten verschiedene Umkehrungen, wovon einige, als Theile umfassenderer Sätze, im nächsten Paragraph folgen *).

*) Auch enthalten sie besondere Fälle, die später, bei Untersuchung der conjugirten Durchmesser der Kegelschnitte, in Betracht

### Harmonische Pole und Gerade in Bezug auf einen Kegelschnitt.

44. Aus vorhergehenden Sätzen folgt leicht eine merkwürdige Eigenschaft der Kegelschnitte, die für mancherlei Untersuchungen sehr fruchtbar und in neuerer Zeit, seit Monge sie in Anregung gebracht, mit gutem Erfolge benutzt worden ist. Das Wesentlichste davon soll hier kurz angedeutet werden.

Es seien $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ (Fig. 43.) irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ ihre Berührungspunkte, so kommen dem Vierseit $AA_1A_2A_3$ und dem Viereck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$, aufser den in (§. 42, III, 3.) angegebenen Beziehungen, auch noch die in (§. 20, I.) ausgesprochenen Eigenschaften zu, wonach unter anderen z. B. die vier Strahlen $\mathfrak{z}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{z}\mathfrak{x}$ harmonisch sind. Diese Strahlen werden also jede Gerade harmonisch schneiden (§. 8, II.), so dafs sowohl die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{x}$, als $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{u}$, als $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{v}$, als $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{x}$ harmonisch sind. Vermöge dieser Punkte sind ferner sowohl die vier Strahlen $\mathfrak{f}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{f}\mathfrak{v}$, als $\mathfrak{e}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{e}\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{e}\mathfrak{x}$ harmonisch. Da zu den drei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{u}$ nur ein einziger, dem $\mathfrak{u}$ zugeordneter, vierter harmonischer Punkt $\mathfrak{y}$ möglich ist, so mufs also, wenn der Kegelschnitt nebst den Tangenten $A$, $A_2$ und der Geraden $\mathfrak{e}\mathfrak{u}$ fest bleiben, die Berührungssehne $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$ der Tangenten $A_1$, $A_3$ stets durch denselben festen Punkt $\mathfrak{y}$ gehen, wo man auch den Durchschnitt $\mathfrak{f}$ der Tangenten auf der festen Geraden $\mathfrak{e}\mathfrak{u}$ annehmen mag; aus ähnlichen Gründen mufs, wenn der Kegelschnitt nebst den Tangenten $A$, $A_3$ und der Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{r}$ fest

---

kommen, nämlich man wird finden: dafs die Scheitel irgend zweier conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts vier harmonische Punkte, und die ihnen zugehörigen Tangenten vier harmonische Tangenten desselben sind.

bleiben, die Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, welche die Berührungspunkte der Tangenten $A_1$, $A_2$ verbindet, immerhin durch den festen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen, wo man auch den Durchschnitt $\mathfrak{e}$ dieser Tangenten längs der festen Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{r}$ hinrücken mag. Wird noch bemerkt, dafs zufolge (§. 43, II, 3, β.), die Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ durch die Berührungspunkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ der sich in $\mathfrak{x}$ schneidenden Tangenten $\mathfrak{x}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{q}$ geht (dies würde auch folgen, wenn man die drei Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ allmählig mit $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}$ zusammen fallen liefse), so folgen zusammengenommen nachstehende Sätze:

I. „Dreht sich eine Gerade ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$, oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$), die einen Kegelschnitt schneidet, um irgend einen (in ihr liegenden) festen Punkt ($\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{x}$): α) so ist der Ort desjenigen Punkts ($\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{s}$), welcher zu den zwei Durchschnittspunkten ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3$, oder $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$) und dem festen Punkte der vierte, und zwar dem letzteren zugeordnete, harmonische Punkt ist, eine bestimmte Gerade (y oder x); und β) in dieser Geraden bewegt sich zugleich der Durchschnitt ($\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{e}$) derjenigen zwei Tangenten ($A_1$, $A_3$, oder $A_1$, $A_2$), durch deren Berührungspunkte jene bewegliche schneidende Gerade geht."

I. „Bewegt sich ein Punkt ($\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{e}$) in einer festen Geraden (y oder x) in der Ebene eines Kegelschnitts: α) so geht diejenige Gerade (v oder s), welche zu den zwei durch den Punkt gehenden Tangenten ($A_1$, $A_3$, oder $A_1$, $A_2$) und der festen Geraden die vierte, der letzteren zugeordnete, harmonische Gerade (Strahl) ist, durch einen bestimmten Punkt ($\mathfrak{y}$, oder $\mathfrak{x}$); und β) um diesen Punkt dreht sich zugleich diejenige Gerade ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$, oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$), welche durch die Berührungspunkte ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3$, oder $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$) der jedesmaligen zwei Tangenten geht."

Vermöge dieser merkwürdigen gegenseitigen Beziehung des Punkts $\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{x}$ und der Geraden y oder x im Verhältnifs zum Kegelschnitt (α), soll in der Folge die Gerade „die Harmonische des Punkts," und der Punkt „der harmonische Pol der Geraden"

in Bezug auf den Kegelschnitt heifsen*). Man sieht dafs je nachdem der Punkt innerhalb, wie 𝔶, oder aufserhalb, wie 𝔵, des Kegelschnitts liegt, seine Harmonische dem Kegelschnitt gar nicht begegnet, wie y, oder ihn schneidet, wie x, und zwar ihn in den Berührungspunkten 𝔭, 𝔮 der durch den Punkt 𝔵 gehenden Tangenten schneidet, wie bereits oben bemerkt worden; so dafs also „der Durchschnitt irgend zweier Tangenten eines Kegelschnitts der harmonische Pol der durch die Berührungspunkte gehenden Geraden ist;" dafs also z. B., e die Harmonische des Punkts 𝔢, f die Harmonische des Punkts 𝔣, c die Harmonische des Punkts 𝔠, u. s. w., ist. Demnach geht die Harmonische jedes Punkts (𝔣, 𝔠, 𝔵, .....) der Geraden Y durch den harmonischen Pol der letzteren. Gleiches findet auch bei der Geraden X statt, nämlich nicht nur die Harmonischen der aufserhalb des Kegelschnitts liegenden Punkte 𝔢, 𝔡, ....., sondern auch die der innerhalb liegenden, wie etwa 𝔰, gehen durch den Pol 𝔵, denn da die vier Punkte $\mathfrak{a}_1$, 𝔰, $\mathfrak{a}_2$, 𝔵 harmonisch sind, so liegt 𝔵 in der Harmonischen s des Punkts 𝔰. Daher folgt (was zum Theil, mit anderen Worten ausgesprochen, im vorstehenden Satze (I, $\beta$.) enthalten ist):

II. „Die harmonischen Pole aller Geraden, die durch irgend einen Punkt (𝔶 oder 𝔵) gehen, in Bezug auf einen Kegelschnitt, liegen in einer bestimmten Geraden (y oder x), nämlich in der Harmonischen jenes Punkts."

II. „Die Harmonischen aller Punkte, die in irgend einer Geraden (y oder x) liegen, in Bezug auf einen Kegelschnitt, gehen durch einen bestimmten Punkt (𝔶 oder 𝔵), nämlich durch den harmonischen Pol jener Geraden."

---

*) Die französischen Mathematiker nennen sie gewöhnlich schlechthin Polaire und Pol.

Oder kürzer:

„Geht eine Gerade durch irgend einen Punkt, so geht die Harmonische des letzteren durch ihren harmonischen Pol."

„Liegt ein Punkt in irgend einer Geraden, so liegt der Pol der letzteren in seiner Harmonischen."

Man wird bemerken, dafs Beides im Grunde nur ein und derselbe Satz ist. In der Folge sollen irgend zwei solche Gerade, von denen jede durch den harmonischen Pol der andern geht, „zwei zugeordnete harmonische Gerade," oder schlechthin „zwei zugeordnete Harmonische," und ähnlicher Weise sollen ihre Pole „zwei zugordnete harmonische Pole" heifsen. Es sind also sowohl y und x, als x und z, als z und y, u. s. w., zwei zugeordnete Harmonische, und sowohl $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, u. s. w., zwei zugeordnete harmonische Pole. Ferner sollen je drei Gerade, von denen jede durch die harmonischen Pole der zwei übrigen geht, wie z. B. x, y, z, oder x, e, s, „drei zugeordnete Harmonische," und ebenso je drei Punkte, von denen jeder der Durchschnitt der Harmonischen der zwei übrigen ist, wie z. B. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, oder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$, „drei zugeordnete harmonische Pole" genannt werden. Die Durchschnitte dreier zugeordneten Harmonischen, sind, wie man sieht, zugleich drei zugeordnete harmonische Pole, und auch umgekehrt.

Da die drei Geraden x, y, z, so wie die drei Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, sowohl durch das vollständige Vierseit $AA_1A_2A_3$, als durch das vollständige Viereck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ bestimmt werden, so folgen unmittelbar nachstehende Sätze:

III. „Alle einem vollständigen Vierseit $AA_1A_2A_3$ ein-

III. „Alle einem (vollständigen) Viereck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ um-

geschriebenen Kegelschnitte, haben gemeinschaftlich drei zugeordnete Harmonische und drei zugeordnete harmonische Pole, nämlich die drei Diagonalen x, y, z des Vierseits und ihre Durchschnitte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.

schriebenen Kegelschnitte, haben gemeinschaftlich drei zugeordnete harmonische Pole und drei zugeordnete Harmonische, nämlich die drei Durchschnitte der gegenüber stehenden Seiten und die durch sie bestimmten Geraden."

Nach dem festgestellten Plane darf diese fruchtbare Betrachtung gegenwärtig nicht weiter entwickelt werden; nur folgende Aufgaben, die mittelst des Lineals sehr leicht zu lösen sind, mögen hier noch Platz finden:

IV. „Die Harmonische irgend eines gegebenen Punkts, in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zu finden."

IV. „Den harmonischen Pol einer gegebenen Geraden, in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zu finden."

Es sei etwa $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ der gegebene Punkt (links). Man ziehe durch denselben irgend zwei den Kegelschnitt schneidende Gerade d, e, oder c, f, verbinde die jedesmaligen vier Durchschnitte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ paarweise durch zwei Paar Geraden b und g, c und f, oder b und g, d und e, so liegen die Durchschnitte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, oder $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}$ dieser Geradenpaare, zufolge der oben angegebenen Beziehungen, in der gesuchten Harmonischen x oder y, welche also gefunden ist. Auf diese Weise suche man, um die Aufgabe rechts zu lösen, zu irgend zwei Punkten der gegebenen Geraden die Harmonischen, so ist der Durchschnitt der letzteren der verlangte Pol (II).

V. „An einen (gezeichnet vorliegenden) Kegelschnitt, mittelst des Lineals, Tangenten zu ziehen, die durch einen, außerhalb desselben liegenden, gegebenen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen.

Man suche, nach (IV.) links, die Harmonische x des gegebenen Punkts ɣ, und verbinde die Punkte p, q, in welchen sie dem Kegelschnitte begegnet, mit dem gegebenen Punkte durch Gerade, so sind diese die verlangten Tangenten (zufolge der oben stehenden Betrachtung).

45. Die vorhin (§. 44.) entwickelten Sätze über harmonische Gerade und Pole sind die Fundamentalsätze von einer sehr fruchtbaren geometrischen Untersuchung, die in der neuesten Zeit von französischen Mathematikern mit grofsem Erfolge angewandt und ausgebildet worden. Ich mufs mir vorbehalten, später auf diesen Gegenstand zurückzukommen (im vierten Abschnitte), wo alsdann nicht allein grofse Reihen von Sätzen und merkwürdigen Eigenschaften entwickelt werden, sondern auch das eigentliche Wesen des Gegenstandes gründlicher und umfassender enthüllt werden wird. Denn in der That wird sich zeigen, dafs weder das Vorstehende (was hier nur beiläufig entwickelt wurde), noch die Art und Weise, wie der Gegenstand bisher von Anderen behandelt worden, über die innere Natur und die eigentliche Bedeutung dieser Eigenschaften gehörige Auskunft giebt, sondern dafs vielmehr dieser Gegenstand, wie er bisher aufgefafst und erkannt worden, nur ein Theil eines umfassenderen Ganzen ist, wovon der andere Theil, der mit jenem in sehr naher Beziehung steht, unter anderer Gestalt längst allgemein bekannt war, und dafs endlich die gemeinschaftliche Urquelle beider Theile aus einer eigenthümlichen Verbindung projectivischer Gebilde entspringt*).

---

*) Dadurch wird unter anderen auch die merkwürdige Eigenschaft von sechs Punkten in einer Geraden, die von Désargues

Um hier nur an einem Beispiele die fruchbare Anwendung der im Vorhergehenden aufgestellten Eigenschaften der harmonischen Geraden und Pole zu zeigen, soll ein von **Brianchon** gefundener merkwürdiger Satz über Kegelschnitte *) durch dieselben bewiesen werden. Der Satz wird durch folgende Aufgabe herbeigeführt.

„**Wenn in einer Ebene sich irgend zwei Kegelschnitte K, $K_1$ befinden, welchem Gesetz sind dann die den Tangenten des einen $K_1$, in Beziehung auf den anderen K, entsprechenden harmonischen Pole unterworfen?**" **)

„**Wenn in einer Ebene sich irgend zwei Kegelschnitte K, $K_1$ befinden, welchem Gesetz sind dann die den Punkten des einen $K_1$, in Beziehung auf den anderen K, entsprechenden Harmonischen unterworfen?**" **)

Es seien a, b, c, d, e, f irgend sechs Tangenten ten des Kegelschnitts K, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ die ihnen entsprechenden harmonischen Pole. Das Sechsseit a b c d e f hat die Eigenschaft, dafs die drei Diagonalen, welche die gegenüberstehenden Ecken verbinden, ein-

---

„**Involution**" genannt wurde, und mit der sich nach ihm verschiedene Mathematiker beschäftiget haben, auf eine sehr einfache und befriedigende Weise aufgeklärt werden.

*) X. *Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique.*

**) Wenn in der Ebene eines Kegelschnitts mehre Gerade oder Punkte angenommen werden, die in Ansehung ihrer gegenseitigen Lage irgend einem bestimmten Gesetze unterworfen sind, so kann gefragt werden, welchem Gesetze die ihnen, in Bezug auf den Kegelschnitt, entsprechenden harmonischen Pole oder Geraden unterworfen seien. Und eine ähnliche Frage kann aufgeworfen werden, in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades im Raume. Die aus diesen Fragen entspringende Untersuchung haben die französischen Mathematiker „**Théorie des polaires réciproques**" genannt. Das allgemeine Gesetz, welches dieser Untersuchung zu Grunde liegt, hat auch **Moebius** (Barycentrische Calcül, §. 287.) auf sehr geschickte Weise bewiesen.

ander in irgend einem Punkte treffen (§. 42, I, 1.), daher müssen die drei Durchschnitte der gegenüberstehenden Seiten des Sechsecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ in einer Geraden liegen, weil sie die harmonischen Pole jener Diagona- sind (§. 44, II.); folglich mufs das Sechseck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ irgend einem Kegelschnitte $K_2$ eingeschrieben sein (§. 42, I, 2.); und da dieser Kegelschnitt durch irgend fünf Punkte, etwa durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ bestimmt ist (§. 41, I.), so ist er folglich der Ort der harmonischen Pole der Tangenten des Kegelschnitts $K_1$, weil jede beliebige andere Tangente statt jener sechsten f genommen werden kann. Läfst man die bewegliche Tangente f allmählig mit einer der festen, etwa mit a, zusammenfallen, so wird sich der Durchschnitt beider Tangenten mit dem Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$ der festen Tangente a vereinigen, und dann müssen auch ihre Pole $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}$ sich vereinigen, und also die Sekante $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ des Kegelschnitts $K_2$ in die Tangente $a_1$ im Punkte $\mathfrak{a}$ übergehen, und zwar mufs diese Tangente $a_1$ die Harmonische jenes Berührungspunkts $\mathfrak{a}_1$ sein. Also folgen nachstehende Sätze:

„Wenn in einer Ebene sich irgend zwei Kegelschnitte $K$, $K_1$ befinden, so liegen die den Tangenten a, b, c, ..... des zweiten $K_1$, in Beziehung auf den ersten $K$, entsprechenden harmonischen Pole $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..... in irgend einem bestimmten dritten Kegelschnitt $K_2$, und es berühren die den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ..... des zweiten $K_1$ entsprechenden Harmonischen $a_1$, $b_1$, $c_1$, ..... einen und denselben dritten Kegelschnitt $K_2$, und zwar solcher Gestalt, dafs jeder Tangente a und ihrem Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$ des zweiten Kegelschnitts $K_1$, ein be-

stimmter Punkt $a$ und dessen zugehörige Tangente $a_1$ im dritten Kegelschnitt $K_2$ entspricht."

Wofern der zweite Kegelschnitt $K_1$ nicht (oder wenigstens nicht ganz) von dem ersten K eingeschlossen wird, folgt aus diesem Satze, vermöge (§. 44.), unmittelbar der anfangs erwähnte Satz von Brianchon, nämlich:

„Bewegen sich zwei veränderliche Tangenten eines Kegelschnitts K so:

dafs die Gerade durch ihre Berührungspunkte stets irgend einen zweiten Kegelschnitt $K_1$ berührt, so durchläuft ihr Durchschnitt irgend einen dritten Kegelschnitt $K_2$." *).

dafs ihr Durchschnitt irgend einen zweiten Kegelschnitt $K_1$ durchläuft, so berührt die Gerade durch ihre Berührungspunkte stets irgend einen dritten Kegelschnitt $K_2$." *).

### Zusammengesetztere Sätze und Porismen.

46. Durch Zusammenstellung oder Verbindung projectivischer Gebilde (Gerade und ebene Strahlbüschel) gelangt man, mit Berücksichtigung ihrer Erzeugung der Kegelschnitte (§. 38, III, IV.), zu zahlreichen merkwürdigen Sätzen und Porismen, wovon, gemäfs der obigen Feststellung (§ 39.), beispielsweise hier einige entwickelt werden sollen.

I. Sind in einer Ebene irgend zwei Gerade A, $A_1$ (Fig. 45.) perspectivisch, und ist $B_2$ ihr Projectionspunkt, und sind sie ferner mit irgend zwei Strahlbüscheln B, $B_1$ perspectivisch, nämlich A mit B, und $A_1$

---

*) Mittelst dieser Sätze kann von folgenden zwei Aufgaben:

„Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebenen Kegelschnitte zu finden"

„Die gemeinschaftlichen Punkte zweier gegebenen Kegelschnitte zu finden"

jede auf die andere zurückgeführt werden.

mit $B_1$, so sind diese Strahlbüschel $B$, $B_1$ unter sich projectivisch (§. 11, III.), und erzeugen folglich (§. 38, IV.) einen Kegelschnitt, d. h., die Durchschnitte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, ..... ihrer entsprechenden Strahlen, also insbesondere auch der Durchschnitt $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ der Geraden $A$, $A_1$, weil in ihm zwei entsprechende Strahlen $e$, $e_1$ sich treffen, liegen in irgend einem Kegelschnitt, der fortan durch $[BB_1]$ bezeichnet werden soll. — Sind andererseits $B$, $B_1$ (Fig. 44.) irgend zwei perspectivische Strahlbüschel; ist $A_2$ ihr perspectivischer Durchschnitt, und sind sie ferner mit irgend zwei Geraden $A$, $A_1$ perspectivisch, so sind diese unter sich projectivisch und erzeugen also irgend einen Kegelschnitt $[AA_1]$. Hieraus gehen unmittelbar folgende bekannte Sätze hervor.

„Bewegen sich die Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ (Fig. 44.) in drei beliebigen festen Geraden $A$, $A_1$, $A_2$, und gehen zwei Seiten $a$, $a_1$ desselben stets durch irgend zwei feste Punkte $B$, $B_1$, so berührt die dritte Seite $a_2$ beständig irgend einen bestimmten Kegelschnitt $[AA_1]$, welcher nämlich auch die beiden ersteren Geraden $A$, $A_1$ nebst der Geraden $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ durch die festen Punkte $B$, $B_1$ zu Tangenten hat."

„Drehen sich die Seiten $a$, $a_1$, $a_2$ eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ (Fig. 45.) um drei beliebige feste Punkte $B$, $B_1$, $B_2$, und bewegen sich zwei Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ desselben in irgend zwei festen Geraden $A$, $A_1$, so durchläuft die dritte Ecke $\mathfrak{a}_2$ irgend einen bestimmten Kegelschnitt $[BB_1]$, in welchem nämlich auch die beiden ersten Punkte $B$, $B_1$, nebst dem Durchschnitte $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ der festen Geraden $A$, $A_1$ liegen."

Und umgekehrt:

„Bewegt sich eine Seite $a_2$ eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ als Tangente eines festen Kegelschnitts $[AA_1]$, und drehen sich die zwei übrigen Seiten $a$, $a_1$ um irgend zwei feste Punkte

„Bewegt sich eine Ecke $\mathfrak{a}_2$ eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ in irgend einem festen Kegelschnitte $[BB_1]$, während die zwei übrigen Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ irgend zwei feste Gerade $A$, $A_1$,

$B, B_1$ in einer Tangente desselben, und bewegen sich die diesen Seiten gegenüberliegenden Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ des Dreiecks in irgend zwei anderen festen Tangenten $A$, $A_1$ des Kegelschnitts, so durchläuft die dritte Ecke $\mathfrak{a}_2$ irgend eine bestimmte Gerade $A_2$." Ebenso kann jede der zwei Geraden $A$, $A_1$, so wie jeder der zwei Punkte $B$, $B_1$ als Folge der jedesmaligen fünf übrigen Gebilde gesetzt werden.

deren Durchschnitt $\mathfrak{e}$, im Kegelschnitt liegt, durchlaufen, und drehen sich die diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten $a, a_1$ um irgend zwei feste Punkte $B, B_1$ des Kegelschnitts, so geht die dritte Seite $a_2$ stets durch irgend einen bestimmten Punkt $B_2$." Eben so kann jeder der zwei Punkte $B$, $B_1$, so wie jede der zwei Geraden $A$, $A_1$ als Folge der jedesmaligen fünf übrigen Gebilde gesetzt werden.

II. Sind irgend vier Gebilde $A$, $A_1$, $B$, $B_1$ (Fig. 46.) unter einander projectivisch, und zwar liegen sowohl $A$ und $B$, als $A_1$ und $B_1$ perspectivisch, dagegen sowohl $A$ und $A_1$, als $B$ und $B_1$ schief, so dafs also die zwei letzteren Paare irgend zwei Kegelschnitte $[AA_1]$, $[BB_1]$ erzeugen, so folgen in Ansehung der entsprechenden Elemente, wie etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $a$, $a_1$ und die durch diese erzeugten $a_2$, $\mathfrak{a}_2$, unmittelbar nachstehende Sätze:

1. „Drehen sich zwei Seiten $a$, $a_1$ eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ um irgend zwei feste Punkte $B$, $B_1$ eines festen Kegelschnitts $[BB_1]$, während die ihnen gegenüberliegenden Ecken $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}$ in irgend zwei festen Geraden $A_1$, $A$ sich bewegen und die dritte Ecke $\mathfrak{a}_2$ den Kegelschnitt durchläuft, so bewegt sich die dritte Seite $a_2$ als Tangente irgend eines bestimmten Kegelschnitts $[AA_1]$, der nämlich auch jene zwei festen Geraden berührt."

„Bewegen sich zwei Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ in irgend zwei festen Tangenten $A$, $A_1$ eines festen Kegelschnitts $[AA_1]$, während die ihnen gegenüberliegenden Seiten $a_1$, $a$ sich um irgend zwei feste Punkte $B_1$, $B$ drehen und die dritte Seite $a_2$ stets den Kegelschnitt berührt, so durchläuft die dritte Ecke $\mathfrak{a}_2$ irgend einen anderen bestimmten Kegelschnitt $[BB_1]$, der nämlich allemal durch jene zwei festen Punkte geht."

Die Abfassung der übrigen Sätze, wo nämlich, statt wie hier auf die Kegelschnitte $[BB_1]$, $[AA_1]$, umgekehrt auf eins der Gebilde A, $A_1$, B, $B_1$ geschlossen wird, überlasse ich dem Leser.

Die beiden Kegelschnitte $[AA_1]$, $[BB_1]$ haben eine eigenthümliche Beziehung zu einander, die sich, so lange $[AA_1]$ ganz oder zum Theil innerhalb $[BB_1]$ liegt, durch folgende merkwürdige Eigenschaft kund giebt. Gelangt nämlich der bewegte Punkt $\mathfrak{a}_2$ in die Durchschnitte $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{e}_2$ der Geraden A, $A_1$ und des Kegelschnitts $[BB_1]$, so vereinigen sich offenbar sowohl die Strahlen $b_1$ und $b_2$, als $c_1$ und $c_2$, als d und $d_1$, als e und $e_1$, so dafs also jedes der zwei Dreiecke $\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2B_1$, $\mathfrak{d}_2\mathfrak{e}_2B$ dem Kegelschnitte $[BB_1]$ eingeschrieben und dem Kegelschnitte $[AA_1]$ umschrieben ist. Da durch diese zwei Dreiecke und durch den einen oder den andern der beiden Kegelschnitte die oben angegebenen projectivischen Beziehungen der Gebilde A, $A_1$, B, $B_1$ bestimmt sind, wie man leicht bemerken wird, so folgen also nachstehende bekannte Sätze.

2. „**Sind zwei Dreiecke $\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2B_1$, $\mathfrak{d}_2\mathfrak{e}_2B$ einem Kegelschnitte $[BB_1]$ eingeschrieben, so sind sie zugleich irgend einem anderen Kegelschnitte $[AA_1]$ umschrieben.**"

2. „**Sind zwei Dreiecke $\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2B_1$, $\mathfrak{d}_2\mathfrak{e}_2B$ einem Kegelschnitte $[AA_1]$ umschrieben, so sind sie zugleich irgend einem anderen Kegelschnitte $[BB_1]$ eingeschrieben.**"

Und ferner folgt:

3. „**Haben zwei Kegelschnitte $[AA_1]$, $[BB_1]$ solche Lage, dafs irgend ein Dreieck dem einen umschrieben und zugleich dem anderen eingeschrieben werden kann, so lassen sich unzählige andere Dreiecke unter denselben Bedingungen beschreiben** (nämlich jeder Punkt des Kegelschnitts $[BB_1]$, der nicht innerhalb des Ke-

gelschnitts $[AA_1]$ liegt, kann Ecke eines solchen Dreiecks sein)."

III. **Beweis der Auflösung** in (§. 17, II.). Das bei dieser Auflösung, die sich auf eine der fruchtbarsten Aufgaben bezieht, angewandte sehr bequeme Verfahren, gründet sich auf folgende Verbindung. Haben nämlich die vier Gebilde $A, A_1, B, B_1$, aufser den vorhin angegebenen projectivischen Beziehungen, noch solche besondere Lage zu einander, dafs $A$ und $A_1$ aufeinander und $B$ und $B_1$ concentrisch liegen, wie in (Fig. 23.), und geht irgend ein Kegelschnitt durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt $(BB_1)$ der Strahlbüschel, welcher die Strahlen der letzteren in $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots\ldots$ schneidet, so werden, wenn man etwa $\alpha$ und $\alpha_1$ als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel $\alpha, \alpha_1$ annimmt, sowohl die Strahlbüschel $\alpha$ und $B_1$ in Ansehung der Strahlen $a_2, b_2, c_2, \ldots\ldots$ und $a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots$, als die Strahlbüschel $\alpha_1$ und $B$ in Ansehung der Strahlen $a_3, b_3, c_3, \ldots\ldots$, und $a, b, c, \ldots\ldots$ projectivisch sein (§. 38, III.), daher sind auch die Strahlbüschel $\alpha$ und $\alpha_1$ in Ansehung der Strahlen $a_2, b_2, c_2, \ldots\ldots$ und $a_3, b_3, c_3, \ldots\ldots$ projectivisch (§. 11, III.), und zwar, da zwei entsprechende Strahlen $a_2, a_3$ vereiniget sind, liegen sie perspectivisch, so dafs also die Gerade $\beta_2\gamma_2$ oder $A_2$ ihr perspectivischer Durchschnitt ist. Durch jeden Punkt der Geraden $A_2$ sind demnach irgend zwei entsprechende Strahlen der Strahlbüschel $\alpha, \alpha_1$ bestimmt, wie z. B. durch $\beta_2$ die Strahlen $b_2, b_3$, und durch die Punkte $\beta_1, \beta$, in welchen diese Strahlen dem Kegelschnitte begegnen, sind wiederum zwei entsprechende Strahlen $b_1, b$ der Strahlbüschel $B_1, B$ bestimmt; daher ist klar, dafs die auf diese Art von den Punkten $\varepsilon, \varkappa$, in welchen die Gerade $A_2$ vom Kegelschnitte getroffen wird, abhängigen entsprechenden Strahlenpaare

e und $e_1$, k und $k_1$ der Strahlbüschel B und $B_1$ nothwendiger Weise aufeinander fallen müssen, und dafs daher auch in den Punkten, in welchen diese Strahlen den aufeinander liegenden Geraden A, $A_1$ begegnen, entsprechende Punktenpaare $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ der letzteren vereiniget sind, was bei der obigen Auflösung angenommen wurde.

Wenn man anstatt des Kegelschnitts, der durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt ($BB_1$) der Strahlbüschel B, $B_1$ geht, einen anderen Kegelschnitt zu Hülfe nähme, der die aufeinander liegenden Geraden A, $A_1$ berührte, so würde man den Beweis für die entgegengesetzte Auflösung erhalten, welcher oben (§. 17, II, b.) Erwähnung geschah. Die Ausführung wird dem Leser überlassen.

IV. Wird aufser den oben (II.) vorausgesetzten Beziehungen der vier Gebilde A, $A_1$, B, $B_1$, dafs sie nämlich unter einander projectivisch seien, und sowohl A und B, als $A_1$ und $B_1$ perspectivisch liegen, nun noch angenommen, es sollen entweder die Geraden A, $A_1$ gleich sein und aufeinander liegen und gleichliegend sein, wie etwa in (Fig. 48.), oder es sollen die Strahlbüschel B, $B_1$ gleich sein und concentrisch liegen und gleichliegend sein, wie etwa in (Fig. 47.), so folgen unmittelbar nachstehende bekannten Sätze:

„Bleibt der Winkel ($aa_1$) an der Spitze eines veränderlichen Dreiseits $aa_1a_2$ (Fig. 47.) der Gröfse nach beständig, aber dreht er sich um seinen festen Scheitelpunkt ($BB_1$), während die zwei übrigen Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ des Dreiecks irgend zwei feste Gerade A, $A_1$ durchlaufen, so bewegt sich die

„Bleibt die Grundlinie $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ (Fig. 48.) der Gröfse nach beständig, aber bewegt sie sich in irgend einer festen Geraden ($AA_1$), während die zwei übrigen Seiten a, $a_1$ sich um zwei feste Punkte B, $B_1$ drehen, so durchläuft die Spitze $\mathfrak{a}_2$ des Dreiecks einen be-

Grundlinie $a_2$ als Tangente irgend eines bestimmten Kegelschnitts $[AA_1]$, der auch die zwei festen Geraden berührt." Ist sowohl der Winkel $(dd_1)$ als $(ee_1)$ dem beständigen Winkel $(aa_1)$ gleich, so sind $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$ diejenigen Punkte, in welchen die Geraden $A$, $A_1$ vom Kegelschnitte berührt werden (§. 38, IV.). Später wird sich zeigen, dafs der Punkt $(BB_1)$ allemal Brennpunkt des Kegelschnitts sei *).

stimmten Kegelschnitt $[BB_1]$, der namentlich durch die zwei festen Punkte geht." Ist sowohl $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ als $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ gleich der beständigen Grundlinie $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, so sind $d$, $e_1$ die den Punkten $B$, $B_1$ zugehörigen Tangenten des Kegelschnitts (§. 38, IV.). Da die unendlich entfernten Punkte der Geraden $A$, $A_1$ einander entsprechen (§. 16, III.), so mufs nothwendig $(AA_1)$ Asymptote des Kegelschnitts, und folglich mufs dieser eine Hyperbel sein; u. s. w.

V. Sind vier Gerade $A, A_1, A_2, A_3$ unter einander projectivisch, und sind sowohl $A$ und $A_2$, als $A_1$ und $A_3$ gleich und liegen sowohl die ersteren als die letzteren aufeinander und sind gleichliegend, wie etwa in (Fig. 49.), und befinden sich $A$ und $A_1$ in perspectivischer, dagegen sowohl $A$ und $A_3$, als $A_1$ und $A_2$, als $A_2$ und $A_3$ in schiefer Lage, wonach also jene einen Projectionspunkt $B$ haben und die letzteren drei Kegel-

*) Läfst man die eine Gerade, etwa $A_1$, sich entfernen, bis sie zuletzt in unendliche Ferne gedacht wird, so sieht man, dafs alsdann die Strahlen $a_1$, $a_2$ parallel werden, und mithin der Winkel $(aa_2)$ auch beständig wird, wenn $(aa_1)$ es ist; da aber in diesem Falle der Kegelschnitt $[AA_1]$, vermöge der unendlich entfernten Tangente $A_1$, eine Parabel sein mufs (§. 36.), so fliefst daraus der folgende bekannte Satz: Bewegt sich der Scheitel $\mathfrak{a}$ eines beständigen Winkels $(aa_2)$ in einer festen Geraden $A$, während der eine seiner Schenkel $a$ sich um einen festen Punkt $(BB_1)$ dreht, so bewegt sich der andere Schenkel $a_2$ als Tangente einer bestimmten Parabel, welche auch jene feste Gerade berührt (und den festen Punkt zum Brennpunkt hat)." — Andererseits (rechts) entsteht ebenfalls ein eigenthümlicher besonderer Fall, wenn man den einen Punkt $B_1$ sich in's Unendliche entfernen läfst. Auch können hier die Geraden $A$, $A_1$ ähnlich angenommen werden, wodurch der obige Satz wesentlich verändert wird.

gelschnitte $[AA_3]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ erzeugen; — und sind andererseits von vier projectivischen Strahlbüscheln $B$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ (Fig. 50.) sowohl $B$ und $B_2$, als $B_1$ und $B_3$ gleich, concentrisch und gleichliegend, und befinden sich $B$ und $B_1$ in perspectivischer, dagegen sowohl $B$ und $B_3$, als $B_1$ und $B_2$, als $B_2$ und $B_3$, in schiefer Lage, wonach also jene einen perspectivischen Durchschnitt $A$ haben und die letzteren drei Kegelschnitte erzeugen müssen: so ergeben sich aus dieser Zusammenstellung unmittelbar folgende zum Theil bekannte Sätze:

„Bleiben zwei gegenüber stehende Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$ eines veränderlichen vollständigen Vierseits $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ (Fig. 49.) der Gröfse nach beständig, aber bewegen sie sich in irgend zwei festen Geraden $(AA_2)$, $(A_1A_3)$, während eine dritte Seite $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ sich um irgend einen festen Punkt $B$ dreht, so bewegen sich die drei übrigen Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ als Tangenten dreier Kegelschnitte $[AA_3]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, wovon jeder jene zwei festen Geraden berührt." *)

„Bleiben zwei gegenüber stehende Winkel $(aa_2)$, $(a_1a_3)$ eines veränderlichen vollständigen Vierseits $aa_1a_2a_3$ (Fig. 50.) der Gröfse nach beständig, aber drehen sie sich um ihre festen Scheitelpunkte $(BB_2)$, $(B_1B_3)$, während eine dritte Ecke $(aa_1)$ sich in irgend einer festen Geraden $A$ bewegt, so durchlaufen die drei übrigen Ecken $(aa_3)$, $(a_1a_2)$, $(a_2a_3)$ irgend drei Kegelschnitte $[BB_3]$, $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$, wovon jeder durch jene zwei festen Punkte geht." *)

---

*) Den Satz rechts (wenn nämlich nur der Kegelschnitt $[B_2B_3]$ berücksichtiget wird) hat Newton zur Erzeugung oder Beschreibung der Kegelschnitte angewandt (*Princip. phil. nat. math.*), und Mac-Laurin benutzte ihn in seiner organischen Geometrie.

Die obigen Sätze sind übrigens, wie man bemerken wird, nur besondere Fälle von denjenigen Sätzen, die statt finden, wenn einerseits $A$ und $A_1$, und andererseits $B$ und $B_1$ nicht perspectivisch, sondern schief liegen, wo alsdann die Seite $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ sich als Tangente eines die Geraden $A$, $A_1$ berührenden Kegelschnitts bewegen, und andererseits die Ecke $(aa_1)$ einen durch die Punkte $B$, $B_1$ gehenden Kegelschnitt durchlaufen mufs.

47. Von der grofsen Menge von Verbindungen projectivischer Geraden und ebener Strahlbüschel, soll hier nur noch folgende Verbindung Platz finden, welche zu solchen zusammengesetzten Sätzen (oder Porismen) und Aufgaben führt, die nach der Art, wie man dergleichen Sätze und Aufgaben bei bisher gewöhnlicher Darstellungsweise zu würdigen pflegt, leicht für bedeutender und schwieriger gehalten werden dürften, als sie es nach Maafsgabe der gegenwärtigen Entwickelung in der That sind.

Hat man in einer Ebene irgend eine Anzahl n beliebige projectivische Gerade $A$, $A_1$, $A_2$, ..... $A_{n-1}$, wovon je zwei sich in schiefer Lage befinden (mithin je zwei einen Kegelschnitt erzeugen), so erzeugen sie im Ganzen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kegelschnitte, und zwar wird durch je eine Reihe entsprechender Punkte, wie etwa durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ..... $\mathfrak{a}_{n-1}$, ein vollständiges n Eck bestimmt, von dessen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Seiten (§. 19.) jede einen von jenen Kegelschnitten berührt. Durch $n-1$ der genannten Kegelschnitte, die zusammen von allen Geraden abhängen, etwa durch die Kegelschnitte $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ....., $[A_{n-2}A_{n-1}]$, d. h., durch die $n-1$ Kegelschnitte, welche, wenn man die Geraden in eine Reihe geordnet hat, von den unmittelbar auf einander folgenden Geraden abhängen, ist offenbar umgekehrt die projectivische Beziehung der Geraden, und sind somit auch alle übrigen Kegelschnitte bestimmt. — Da andererseits Entsprechendes statt findet, so folgen also nachstehende umfassende Sätze:

| | |
|---|---|
| I. „Wenn in einer Ebene sich irgend eine Anzahl n beliebige feste Gerade $A$, $A_1$, $A_2$, ..... $A_{n-1}$ befinden, von denen, der Reihe nach genommen, je zwei unmit- | I. „Wenn in einer Ebene sich irgend eine Anzahl n beliebige feste Punkte $B$, $B_1$, $B_2$, ..... $B_{n-1}$ befinden, von denen, der Reihe nach genommen, je zwei unmit- |

telbar aufeinander folgende von irgend einem beliebigen festen Kegelschnitte berührt werden, welches also im Ganzen n—1 Kegelschnitte [$AA_1$], [$A_1A_2$], ....., [$A_{n-2}\,A_{n-1}$] sind, und wenn ein veränderliches vollständiges nEck $a\,a_1a_2 \ldots a_{n-1}$, sich so bewegt, dafs seine Ecken $a$, $a_1$, $a_2$, ....., $a_{n-1}$, derReihe nach, jene festen Geraden durchlaufen, während diejenigen n—1Seiten desselben, welche die nach der Ordnung unmittelbar aufeinander folgenden Ecken verbinden, also die Seiten $aa_1$, $a_1a_2$, $a_2a_3$, ....., $a_{n-2}\,a_{n-1}$, sich beziehlich als Tangenten um jene festen Kegelschnitte herumbewegen; so bewegen sich die $\frac{1}{2}$ (n-1)(n-2) übrigen Seiten als Tangenten um eben so vieleKegelschnitte, von denen jeder insbesondere diejenigen zwei festen Geraden berührt, welche von den Endpunkten der zugehörigen Seite durchlaufen werden."

telbar aufeinander folgende in irgend einem beliebigen festenKegelschnitte liegen, welches also im Ganzen n—1 Kegelschnitte [$BB_1$], [$B_1B_2$], ..... [$B_{n-2}\,B_{n-1}$] sind, und wenn ein veränderliches vollständiges n Seit $aa_1a_2$ ..... $a_{n-1}$ sich so bewegt, dafs seine Seiten $a$, $a_1$, $a_2$, ..... $a_{n-1}$, der Reihe nach sich um jene festen Punkte drehen, während diejenigen n—1 Ecken desselben, in welchen sich die nach der Ordnung unmittelbar aufeinander folgenden Seiten schneiden, also die Ecken $aa_1$, $a_1a_2$, $a_2a_3$, ....., $a_{n-2}\,a_{n-1}$, nach der Ordnung beziehlich jene festen Kegelschnitte durchlaufen; so durchlaufen die $\frac{1}{2}$ (n-1)(n-2) übrigen Ecken des n Seits eben so viele verschiedene Kegelschnitte, von welchen jeder insbesondere durch diejenigen zwei festen Punkte geht, um welche sich die zwei Seiten, die sich in der zugehörigen Ecke schneiden, drehen."

Zu der grofsen Menge besonderer Fälle, welche in den vorstehenden Sätzen enthalten sind, und die namentlich dadurch entstehen, dafs man den Gebilden $A$, $A_1$, $A_2$, ....., oder $B$, $B_1$, $B_2$, ..... eigenthümliche Lage zukommen läfst, oder sie als gleich, oder die ersteren als ähnlich annimmt, u. s. w., gehören z. B. auch folgende, wo nämlich angenommen wird von den Gebilden $A$, $A_1$, ..... $A_{n-1}$, oder $B$, $B_1$ ..... $B_{n-1}$ befinden sich, nach der Reihe, je zwei unmittelbar aufein-

ander folgende in perspectivischer Lage. In diesem Falle vereinfachen sich die obigen Sätze auf folgende bekannte Sätze:

II. „Durchlaufen die Ecken $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ eines veränderlichen vollständigen n Ecks, nach der Reihe, n beliebige feste Gerade $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, die in einer Ebene liegen, während n—1 Seiten desselben, die irgend einem einfachen nEck angehören, aus welchen das vollständige besteht, etwa die Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$, sich um eben so viele beliebige feste Punkte $B, B_1, \ldots, B_{n-1}$ drehen, so bewegen sich die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ übrigen Seiten, einzeln genommen, als Tangenten um eben so viele Kegelschnitte, von denen jeder diejenigen zwei festen Geraden berührt, welche die zwei Ecken, die in der zugehörigen Seite liegen, durchlaufen." Auf die genannten n—1 Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$ könnte man ferner den nebenstehenden Satz anwenden, wodurch der diesseitige Satz noch ausgedehnter würde.

II. „Drehen sich die Seiten $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ eines veränderlichen vollständigen n Seits nach der Reihe um n beliebige feste Punkte $B, B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$, die in einer Ebene liegen, während n—1 Ecken desselben, die irgend einem einfachen nEck angehören, aus welchen das vollständige besteht, etwa die Ecken $aa_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-2}a_{n-1}$, eben so viele beliebige feste Gerade $A, A_1, \ldots, A_{n-2}$ durchlaufen, so durchlaufen die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ übrigen Ecken, einzeln genommen, eine gleiche Anzahl bestimmter Kegelschnitte, von denen nämlich jeder durch diejenigen zwei festen Punkte geht, um welche sich die zwei Seiten, die sich in der zugehörigen Ecke schneiden, drehen." Auf die genannten n—1 Ecken $aa_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-2}a_{n-1}$ könnte man ferner den nebenstehenden Satz anwenden, wodurch der diesseitige Satz noch vollständiger würde.

Der Satz links wurde zuerst von Braikenridge bewiesen*); um die Erfindung eines Theiles dieses Satzes stritt er sich mit Mac-Laurin (Phil. Trans.)

*) Exertitatio geometrica de descriptione linearum curvarum.

Dafs und in wie fern die obigen Sätze (§. 22, II.) wiederum besondere Fälle der vorstehenden Sätze sind, wird man leicht wahrnehmen.

Die folgenden zwei Aufgaben sind auf ähnliche Weise umfassend, wie die oben stehenden Sätze (I.).

III. „Werden von den Seiten $A, A_1, \ldots\ldots, A_{n-1}$ eines beliebigen nEcks je zwei unmittelbar aufeinander folgende von irgend einem Kegelschnitte berührt, welches im Ganzen n Kegelschnitte $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, ....., $[A_{n-1}A]$ sind, so soll ein anderes n Eck beschrieben werden, dessen Ecken $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$, nach der Reihe, in den Seiten jenes nEcks liegen, und dessen Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, ....., $\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{a}$, nach der Reihe, jene Kegelschnitte berühren."

III. „Liegen von den Ecken $B, B_1, \ldots\ldots, B_{n-1}$ eines beliebigen nEcks je zwei unmittelbar aufeinander folgende in irgend einem Kegelschnitte, welches im Ganzen nKegelschnitte $[BB_1]$, $[B_1B_2]$, ....., $[B_{n-1}B]$ sind, so soll ein anderes nEck beschrieben werden, dessen Seiten $a, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}$, nach der Reihe, durch die Ecken jenes nEcks gehen, und dessen Ecken $aa_1$, $a_1a_2$, ....., $a_{n-1}a$, nach der Reihe, in jenen Kegelschnitten liegen."

Die Mittel, durch welche die vorliegenden Aufgaben leicht gelöst werden, sind in dem Bisherigen enthalten und bereits mehrfach angewandt, so dafs ich die Auflösung dem Leser zur Selbstübung überlassen darf. Die frühere Aufgabe in (§. 25.) ist übrigens ein besonderer Fall von jeder der zwei vorstehenden Aufgaben.

### Anmerkung.

48. Es ist fast überflüssig, nochmals zu erinnern, dafs die von (§. 41.) an bis hierher durchgeführten Betrachtungen, denen projectivische Gebilde (Gerade und ebene Strahlbüschel) in der Ebene zur Grundlage dienten, auf entsprechende Weise bei projectivischen Gebilden (ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel) im Strahl-

büschel im Raume statt haben, ja dafs die Resultate jener Betrachtungen, sogleicch auf die letzteren Gebilde übertragen werden können, wenn man nämlich, wie bereits oben angegeben worden (§. 33. u. Ende §. 36.), überall: Strahl, ebener Strahlbüschel, Ebenenbüschel, n kantiger Körperwinkel, n seitiger Körperwinkel, Kegel (zweiten Grades), beziehlich statt: Punkt, Gerade, ebener Strahlbüschel, n Eck, n Seit, Kegelschnitt setzt. — Ebenso finden die Betrachtungen auf entsprechende Weise auf der Kugelfläche statt, und es lassen sich die genannten Resultate ähnlicherweise auf dieselbe übertragen (§. 34, und §. 38.).

### Erzeugnisse projectivischer Gebilde im Raume.

49. Es ist nun noch zu untersuchen (§. 39.), was für Figuren durch die entsprechenden Elementenpaare irgend zweier projectivischen Gebilde, die sich weder in derselben Ebene noch in demselben Strahlbüschel, sondern beliebig im Raume befinden, erzeugt werden. Die drei Arten von Gebilden, Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel, geben in dieser Hinsicht, wenn sie paarweise genommen werden, folgende sechs Fälle:

1) eine Gerade A und ein Ebenenbüschel 𝔄,

2) zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$,

3) ein Ebenenbüschel 𝔄 und ein ebener Strahlbüschel B,

4) ein ebener Strahlbüschel B und eine Gerade A,

5) zwei Gerade A, $A_1$, und

6) zwei Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$.

Von diesen sechs Fällen sind der fünfte und sechste ungleich wichtiger und folgenreicher, als die vier übrigen; letztere sollen daher zuerst beseitiget werden.

I. Liegen zwei projectivische Gebilde, eine Gerade A und ein Ebenenbüschel 𝔄, beliebig im Raume, d. h., befinden sie sich in schiefer Lage, so findet kein unmittelbares Erzeugniſs durch ihre entsprechenden Elementenpaare statt. Ein mittelbares Erzeugniſs wird unten im Anhange gegeben (§. 60, 26.).

II. Liegen zwei projectivische ebene Strahlbüschel B, $B_1$ beliebig im Raume, so geben sie ebenfalls kein unmittelbares Erzeugniſs, wohl aber findet bei ihnen der folgende Umstand statt.

„Legt man, von irgend einem beliebig angenommenen Punkte D aus, Gerade, welche die entsprechenden Strahlenpaare a und $a_1$, b und $b_1$, c und $c_1$, ....., der Strahlbüschel B, $B_1$ schneiden, so liegen alle diese Geraden in einer Kegelfläche D zweiten Grades."

Dieser Satz gründet sich auf den früheren (§. 38, II, rechts). Denn denkt man sich zwei Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$, deren Axen durch den Punkt D gehen, und welche mit den gegebenen ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ perspectivisch sind, so werden dieselben unter sich projectivisch sein, und mithin werden die Durchschnitte der entsprechenden Ebenenpaare $\alpha$ und $\alpha_1$, $\beta$ und $\beta_1$, $\gamma$ und $\gamma_1$, ....., zufolge des angeführten Satzes, in einer Kegelfläche D liegen, und da diese Durchschnitte offenbar die genannten, durch den Punkt D, gelegten Geraden sind, so folgt daraus die Richtigkeit des vorstehenden Satzes.

III. Liegen zwei projectivische Gebilde 𝔄, B — ein Ebenenbüschel und ein ebener Strahlbüschel — beliebig im Raume, „so liegen offenbar die Punkte, in welchen die entsprechenden Elementenpaare $\alpha$ und a, $\beta$ und b, $\gamma$ und c, ..... sich schneiden, in irgend einem Kegelschnitt." Denn die

Ebene des Strahlbüschels B schneidet den Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ in einem ebenen Strahlbüschel $B_1$, welcher mit dem Strahlbüschel B projectivisch ist, und mit ihm den genannten Kegelschnitt erzeugt.

IV. Liegen zwei projectivische Gebilde A, B — eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel — beliebig im Raume, so wird durch je zwei entsprechende Elemente derselben eine Ebene bestimmt, d. h., durch jeden Punkt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..... der Geraden A und durch den ihm entsprechenden Strahl a, b, c, ..... des Strahlbüschels B geht eine bestimmte Ebene, und es frägt sich, welchem Gesetz diese Ebenen insgesammt unterworfen seien? Diese Frage kann leicht durch frühere Sätze beantwortet werden, z. B. wie folgt.

Denkt man sich einen Strahlbüschel $B_1$, welcher mit dem gegebenen B concentrisch und mit der Geraden A perspectivisch ist, so wird also derselbe mit B projectivisch sein, und die Ebenen, welche durch die entsprechenden Strahlenpaare der beiden Strahlbüschel B, $B_1$ gehen, werden offenbar die vorgenannten, zu untersuchenden, Ebenen sein. Nun werden alle diese Ebenen, zufolge (§. 38, II.), von einem Kegel zweiten Grades berührt, und zwar findet dabei der besondere Umstand statt, dafs die Ebenen der Strahlbüschel B, $B_1$ vom Kegel in denjenigen zwei Strahlen berührt werden, deren entsprechende in ihrem Durchschnitte vereinigt sind. Daher werden auch die Gebilde A, B vom Kegel in denjenigen Elementen berührt, deren entsprechende in ihrem gegenseitigen Durchschnitte zusammentreffen, d. h., trifft die Gerade A den Strahl d des Strahlbüschels B, und wird sie von demselben im Punkte $\mathfrak{e}$ getroffen, so wird sie vom Kegel im Punkte $\mathfrak{d}$ und die Ebene des Strahlbüschels wird von demselben im

Strahle e berührt. Demgemäfs folgt der nachstehende Satz:

„Befinden sich eine Gerade A und ein ebener Strahlbüschel B, die projectivisch sind, im Raume in beliebiger Lage, so berühren die Ebenen, welche durch ihre entsprechenden Elementenpaare bestimmt werden, irgend eine Kegelfläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt (Scheitel) mit dem Mittelpunkt B des Strahlbüschels zusammenfällt, und welche die Gerade A und die Ebene des Strahlbüschels B in denjenigen Elementen b, e berührt, deren entsprechende d, e (im gegenseitigen Durchschnitte der Gebilde) sich treffen."

Bei diesem Satze können folgende zwei besondere Fälle eintreten. 1) Die Gerade A kann den Mittelpunkt des Strahlbüschels B treffen; dann reduzirt sich der genannte Kegel auf die Gerade A, d. h., in diesem Falle bilden die genannten berührenden Ebenen ein Ebenenbüschel, dessen Axe A ist. 2) Der Strahlbüschel B kann aus einem System paralleler Strahlen bestehen; dann tritt an die Stelle des Kegels ein Cylinder.

50. Von den obigen sechs Fällen sind nun noch die zwei wichtigsten zu untersuchen (§. 49, 5, 6.), nämlich es ist noch zu untersuchen, welchen Gesetzen bei zwei projectivischen Geraden A, $A_1$, die im Raume beliebig liegen, die sämmtlichen Projectionsstrahlen, und bei zwei projectivischen, im Raume beliebig liegenden, Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare unterworfen sind, d. h., welche Figuren durch sie erzeugt werden, und welche bemerkenswerthe Umstände dabei statt finden. Nach der Art, wie vorhin die vier übrigen Fälle betrachtet

wurden, lassen sich über die gegenwärtigen Fälle vorläufig folgende Eigenschaften angeben.

Befinden sich zwei projectivische Gerade A, $A_1$ in beliebiger Lage im Raume, so wird jeder beliebige Punkt D mit allen ihren Projectionsstrahlen ein System von Ebenen bestimmen, welche die gesammten Berührungsebenen eines Kegels D zweiten Grades sind. Denn denkt man sich zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$, deren Mittelpunkte in D liegen, und welche mit den gegebenen Geraden A, $A_1$ perspectivisch sind, so sind dieselben unter sich projectivisch (§. 11, III.) und erzeugen, zufolge (§. 38, II.), den genannten Kegel; weil offenbar die Ebenen, welche durch die entsprechenden Strahlenpaare der Strahlbüschel B, $B_1$ gehen, dieselben sind, welche durch den Punkt D und durch die entsprechenden Punktenpaare (oder die Projectionsstrahlen) der Geraden A, $A_1$ bestimmt werden, woher denn die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung erhellet.

Befinden sich andererseits zwei projectivische Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$ in beliebiger schiefer Lage im Raume, so wird irgend eine Ebene E die gesammten Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenenpaare in einem Kegelschnitte schneiden, d. h., die Punkte, in welchen die Ebene allen jenen Durchschnittslinien begegnet, bilden irgend einen Kegelschnitt. Denn die Ebene E schneidet die gegebenen Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$ in zwei ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$, welche projectivisch sind (weil 𝔄 und $𝔄_1$ es sind), und welche also, zufolge (§. 38, IV.), einen Kegelschnitt erzeugen, der offenbar der vorgenannte Kegelschnitt ist.

Demnach folgt also zuförderst, dafs:

„Wenn zwei projectivische Gerade A, $A_1$ im Raume beliebig liegen, so sind die Ebenen, welche irgend ein beliebig angenommener Punkt D mit allen ihren Projectionsstrahlen bestimmt, die gesammten Berührungsebenen eines Kegels zweiten Grades, welcher jenen Punkt zum Mittelpunkt hat."

„Wenn zwei projectivische Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$ im Raume beliebig liegen, so wird die Figur (Fläche), welche durch die gesammten Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenenpaare bestimmt wird, von jeder beliebigen Ebene E in irgend einem Kegelschnitte geschnitten."

**51.** Um die begonnene Untersuchung (§. 50.) nach ihrem ganzen Umfange durchzuführen, diene folgende Betrachtung, durch welche der Gegenstand vollständig und klar dargestellt wird.

I. Sind zwei Gerade A, $A_1$ mit einem und demselben Ebenenbüschel $A_2$ (welcher zur Zweckmäfsigkeit für die gegenwärtige Betrachtung durch $A_2$, statt durch $𝔄_2$, wie bisher, bezeichnet werden soll) perspectivisch (§. 28, III.), so sind sie unter sich projectivisch, und wenn sie einander nicht schneiden, so wird man ihre Lage als eine beliebige schiefe Lage im Raume ansehen können. Da die entsprechenden Punktenpaare 𝔞 und $𝔞_1$, 𝔟 und $𝔟_1$, 𝔠 und $𝔠_1$, u. s. w. der Geraden A, $A_1$ in den Ebenen $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, u. s. w. des Ebenenbüschels $A_2$ liegen, so müssen auch ihre Projectionsstrahlen $𝔞𝔞_1$, $𝔟𝔟_1$, $𝔠𝔠_1$, u. s. w., oder a, b, c, ....., in diesen Ebenen liegen und daher schneiden alle Projectionsstrahlen, a, b, c, ....., die Axe $A_2$, so dafs also dieselben ein System von Geraden bilden, wovon jede die drei Geraden A, $A_1$, $A_2$ schneidet. — Sind andererseits zwei Ebenenbüschel A, $A_1$ mit einer und derselben Geraden $A_2$ perspectivisch, also unter sich projectivisch, und liegen ihre Axen A, $A_1$ nicht in einer Ebene, so dafs also ihre Lage als beliebig schief angesehen werden kann, so

begegnet die Durchschnittslinie je zweier entsprechender Ebenen derselben, d. h., die Durchschnittslinien der Ebenenpaare $\alpha$ und $\alpha_1$, $\beta$ und $\beta_1$, $\gamma$ und $\gamma_1$, u. s. w. offenbar jeder der drei Geraden A, $A_1$, $A_2$.

II. Geht man umgekehrt von der Forderung aus, es sollen, wenn im Raume irgend drei Gerade A, $A_1$, $A_2$, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, andere Gerade a, b, c, d, ..... gefunden werden, welche jene drei schneiden, so wird man, nach dem was man so eben (I.) gesehen hat, auf folgende zwei Arten der Aufgabe ihrem ganzen Umfange nach genügen.

*a*) durch eine der drei gegebenen Geraden, etwa durch $A_2$, denke man sich eine beliebige Ebene $\alpha_2$, so wird diese die zwei übrigen Geraden A, $A_1$ in zwei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ schneiden, durch welche eine Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ oder a bestimmt wird, die offenbar der Forderung genügt. Läfst man nun in der Vorstellung die Ebene $\alpha_2$ sich um $A_2$ herumbewegen, so sieht man die Gerade a längs der drei Geraden A, $A_1$, $A_2$ fortgleiten, und zwar so, dafs sie nothwendiger Weise nach und nach in die Lage jeder anderen Geraden b, c, d, ..... gelangt, die der Aufgabe genügt. Zugleich folgt daraus, dafs durch jeden Punkt jeder der zwei Geraden A, $A_1$ **eine**, aber nur **eine einzige** schneidende Gerade geht. Denn da die Ebene $\alpha_2$ durch ihre Bewegung ein Ebenenbüschel $A_2$ beschreibt, so sind die Geraden A, $A_1$, in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ u. s. w., in welchen sie nach einander von jener bewegten Ebene geschnitten werden, projectivisch (§. 28, III.), d. h., sie werden von den gesammten Geraden a, b, c, d, ....., welche die drei Geraden A, $A_1$, $A_2$ schneiden, projectivisch geschnitten, so dafs diese Schaar Gerader ihre Projec-

tionsstrahlen sind. Diejenigen zwei schneidenden Geraden oder Projectionstrahlen q, r, welche nach den unendlich entfernten Punkten q, $r_1$ der Geraden A, $A_1$ gerichtet sind, also die Parallelstrahlen (§. 9.), erhält man, wenn die bewegte Ebene $\alpha_2$ in die Lage kommt, wo sie mit A oder $A_1$ parallel ist, nämlich ist sie mit A parallel, so wird sie die andere Gerade $A_1$ im Punkte $q_1$ schneiden, und ist sie mit $A_1$ parallel, so wird sie der A im Punkte r begegnen, und alsdann sind die Strahlen, welche man durch diese Punkte $q_1$, r den Geraden A, $A_1$ parallel zieht, die genannten Parallelstrahlen q, r. Hierdurch ist auch zugleich die Aufgabe gelöst: „Diejenige Gerade (q oder r) zu finden, welche irgend zwei (im Raume) gegebene Gerade ($A_2$ und $A_1$, oder $A_2$ und A) schneidet und mit irgend einer gegebenen dritten Geraden (A oder $A_1$) parallel ist."

Gleich wie die zwei Geraden A, $A_1$ von der Schaar Gerader a, b, c, d,..... projectivisch geschnitten werden, eben so werden auch die zwei Geraden A, $A_2$, oder $A_1$, $A_2$, und also alle drei Geraden A, $A_1$, $A_2$ von denselben projectivisch geschnitten.

*b*) In einer der drei gegebenen Geraden, etwa in $A_2$, nehme man einen beliebigen Punkt $a_2$ an, und denke sich durch diesen und durch die zwei übrigen Geraden A, $A_1$ zwei Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$, so wird die Durchschnittslinie a der letzteren offenbar der obigen Forderung genügen, d. h., sie wird die drei Geraden A, $A_1$, $A_2$ schneiden. Läfst man nun in der Vorstellung den Punkt $a_2$ sich in der Geraden $A_2$ fortbewegen, so wird die genannte Durchschnittslinie a längs der drei festen Geraden A, $A_1$, $A_2$ fortgleiten, und zwar so, dafs sie nach und nach in die Lage jeder anderen Geraden b, c, d,..... gelangt, die der Aufgabe genügt. Durch

jeden Punkt der Geraden $A_2$ geht demnach eine, und nur eine Gerade, welche die drei festen Geraden A, $A_1$, $A_2$ schneidet. Während der Punkt $a_2$ die Gerade $A_2$ durchläuft, drehen sich die genannten Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$ um die Axen A, $A_1$ und beschreiben also zwei Ebenenbüschel A, $A_1$, die unter sich projectivisch sind, weil beide mit der Geraden $A_2$ perspectivisch sind, nnd deren entsprechenden Ebenen $\alpha$ und $\alpha_1$, $\beta$ und $\beta_1$, $\gamma$ und $\gamma_1$ u. s. w. jene Schaar Gerader a, b, c,..... zu Durchschnittslinien haben. Im Falle, wo der unendlich entfernte Punkt der Geraden $A_2$ an die Stelle des bewegten Punktes $a_2$ tritt, werden offenbar die zugehörigen Ebenen ($\alpha$, $\alpha_1$) der Geraden $A_2$ parallel, und folglich wird auch ihre Durchschnittslinie dieser Geraden parallel, so dafs man also daraus ein zweites Verfahren entnehmen kann, um die vorhin (a.) angeführte besondere Aufgabe: „eine Gerade zu finden, welche irgend zwei gegebene Gerade A, $A_1$ schneidet und mit irgend einer gegebenen dritten Geraden $A_2$ parallel ist," zu lösen, nämlich man legt durch A, $A_1$ diejenigen zwei Ebenen, welche der $A_2$ parallel sind, so ist ihre Durchschnittslinie die verlangte Gerade.

Eben so wie die genannte Schaar schneidender Geraden a, b, c, d, ..... die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare $\alpha$ und $\alpha_1$, und $\beta$ und $\beta_1$, u. s. w. zweier projectivischen Ebenenbüschel A, $A_1$ sind, sind sie es auch sowohl von zwei projectivischen Ebenenbüscheln A, $A_2$, als $A_1$, $A_2$, und mithin von drei projectivischen Ebenenbüscheln A, $A_1$, $A_2$.

III. Irgend drei beliebige Gerade A, $A_1$, $A_2$ im Raume, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, können also (II.) von einer unzähligen Schaar anderer Geraden a, b, c, d, ..... geschnitten werden, und zwar

finden dabei die Umstände statt, dafs je zwei von jenen drei Geraden durch die Schaar Gerader projectivisch geschnitten werden, und dafs sie andererseits die Axen zweier projectivischer Ebenenbüschel sind, deren entsprechende Ebenen die Schaar von Geraden zu Durchschnittslinien haben. Da die Lage von zwei solchen projectivischen Geraden oder Ebenenbüscheln, wie etwa A und $A_1$, als eine beliebige schiefe Lage angesehen werden kann, so ist zu vermuthen, dafs auch umgekehrt die Projectionsstrahlen a, b, c, d,..... irgend zweier schiefliegender projectivischer Geraden A, $A_1$, oder die Durchschnittslinien a, b, c, d,..... der entsprechenden Ebenenpaare irgend zweier schiefliegender projectivischer Ebenenbüschel A, $A_1$ allemal von vielen anderen Geraden, wie etwa $A_2$, geschnitten werden können. Diese Vermuthung wird wie folgt als wahr erwiesen.

*a*) Befinden sich zwei projectivische Gerade A, $A_1$ in beliebiger schiefer Lage im Raume, und man legt irgend eine Gerade $A_2$ so, dafs sie irgend drei Projectionsstrahlen derselben schneidet, etwa die Projectionsstrahlen a, b, c (II,), so werden, wenn man sich für einen Augenblick die Schaar Gerader denkt, welche die drei Geraden A, $A_1$, $A_2$ schneiden, die beiden gegebenen Geraden A, $A_1$ von denselben projectivisch geschnitten (II.), da nun die drei Geraden a, b, c sowohl zu dem einen als zu dem anderen System von Projectionsstrahlen der Geraden A, $A_1$ gehören, und da die projectivische Beziehung der letzteren durch drei Projectionsstrahlen bestimmt ist, so sind folglich die ursprünglichen Projectionsstrahlen a, b, c, d, e, ..... der Geraden A, $A_1$ und die genannte Schaar Gerader, welche die drei Geraden A, $A_1$, $A_2$ schneiden, eine und dieselbe Schaar von Geraden, und folglich schneidet

jede Gerade $A_2$, welche irgend drei Projectionsstrahlen a, b, c der gegebenen Geraden A, $A_1$ begegnet, auch alle übrigen Projectionsstrahlen d, e, ..... derselben.

*b*) Befinden sich zwei projectivische Ebenenbüschel A, $A_1$ in beliebiger schiefer Lage und man legt irgend eine Gerade $A_2$, welche irgend drei Durchschnittslinien von entsprechenden Ebenenpaaren schneidet, etwa die Durchschnittslinien a, b, c der Ebenenpaare $\alpha$ und $\alpha_1$, $\beta$ und $\beta_1$, $\gamma$ und $\gamma_1$, so wird dieselbe nothwendiger Weise auch allen übrigen Durchschnittslinien entsprechender Ebenen begegnen; denn wollte man sich um die nämlichen Axen A, $A_1$ zwei andere Ebenenbüschel denken, die unter sich projectivisch und zwar beide zugleich mit jener Geraden $A_2$ perspectivisch wären, so dafs je zwei entsprechende Ebenen derselben durch den nämlichen Punkt der Geraden $A_2$ gingen, so würden dieselben nicht von den gegebenen Ebenenbüscheln A, $A_1$ verschieden sein können, weil sie mit diesen die genannten drei entsprechenden Ebenenpaare gemein hätten, durch welche eben die projectivische Beziehung bestimmt ist.

Aus beiden vorstehenden Betrachtungen (a, b.) folgt also:

1) „Dafs die Projectionsstrahlen a, b, c, d, ..... zweier projectivischer Geraden A, $A_1$, die sich in beliebiger schiefer Lage im Raume befinden, von unzähligen Geraden $A_2$, $A_3$, $A_4$, ..... geschnitten werden können, und zwar schneidet jede der letzteren alle jene Projectionsstrahlen, sobald sie irgend drei derselben begegnet."

1) „Dafs die Durchschnittslinien a, b, c, d, ..... der entsprechenden Ebenen zweier schiefliegender projectivischer Ebenenbüschel A, $A_1$ von unzähligen Geraden $A_2$, $A_3$, $A_4$, ..... geschnitten werden können, und zwar schneidet jede der letzteren alle jene Durchschnittslinien, sobald sie irgend drei derselben begegnet."

2) „Dem-

2) „Demnach haben die Projectionsstrahlen zweier schiefliegender projectivischer Geraden A, $A_1$ im Raume und die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen zweier schiefliegender projectivischer Ebenenbüschel A, $A_1$ gleiche Eigenschaft, nämlich sie sind eine Schaar von Geraden a, b, c, d, e,....., welche von einer anderen Schaar von unzähligen Geraden A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$,...... geschnitten werden, und zwar sind, zufolge (II.):

„je zwei Gerade, die zu der einen oder zu der andern Schaar gehören, unter sich projectivisch und die jedesmalige andere Schaar Gerader sind ihre Projectionsstrahlen."

„je zwei Gerade, die zu der einen oder zu der andern Schaar gehören, die Axen projectivischer Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen die andere Schaar zu Durchschnittslinien haben."

Oder (II.):

3) „Wenn im Raume irgend drei Gerade A, $A_1$, $A_2$, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so giebt es in denselben unzählige mal drei solche Punkte, die in einer Geraden liegen, so dafs also dieselben von einer unzähligen Schaar Gerader a, b, c, d,....... geschnitten werden können, und diese letztern können hinwieder von einer andern Schaar Gerader geschnitten werden, zu welchen auch jene drei Geraden gehören; oder:

3) „Wenn im Raume irgend drei Ebenenbüschel A, $A_1$, $A_2$, von deren Axen keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so giebt es in denselben unzählige mal drei solche Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden, welche den drei Axen begegnet, so dafs also diese von einer Schaar Gerader geschnitten werden, welche ebenfalls von einer andern Schaar Gerader geschnitten werden, zu welcher jene drei Axen gehören; oder:

„Wenn im Raume irgend drei Gerade A, $A_1$, $A_2$ irgend drei andere Gerade a, b, c schneiden, so schneiden alle Geraden d, e, ......, wel-

che den drei ersten begegnen, alle Geraden $A_3, A_4, \ldots\ldots$, welche den drei letzten begegnen*); und es haben die zwei Schaaren Gerader $A, A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots\ldots$, a, b, c, d, e,.... solche Beziehung zu einander:"

„dafs je zwei Gerade, die der nämlichen Schaar angehören, unter sich projectivisch sind und zwar die andere Schaar Gerader zu Projectionsstrahlen haben."

„dafs je zwei Gerade aus einer Schaar die Axen projectivischer Ebenenbüschel sind, deren entsprechende Ebenen die andere Schaar zu Durchschnittslinien haben."

IV. Zwei solche zusammengehörige Schaaren von Geraden, die einander gegenseitig schneiden, erfüllen eine krumme, windschiefe Fläche zweiter Ordnung, nämlich das „einfache Hyperboloïd" (hyperboloïde à une nappe). Man kann daher, gemäfs der vorstehenden Sätze, auch sagen:

1) „Irgend zwei im Raume beliebig schiefliegende projectivische Gerade $A, A_1$ erzeugen ein einfaches Hyperboloïd, d. h. sie und alle ihre Projectionsstrahlen, nebst der Schaar Gerader, welche die letzteren schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloïd."

1) „Irgend zwei im Raume beliebig schiefliegende projectivische Ebenenbüschel $A, A_1$ erzeugen ein einfaches Hyperboloïd, d. h. die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen, nebst der Schaar Gerader, welche dieselben schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloïd."

Wenn in der Folge das einfache Hyperboloïd als durch zwei projectivische Gerade oder Ebenenbüschel $A, A_1$ erzeugt angesehen werden soll, so mag es durch $[AA_1]$ bezeichnet werden.

*) Diese Eigenschaft wird hier mittelst der projectivischen Beziehungen unstreitig viel einfacher bewiesen, als es z B. bei dem Beweise der Fall ist, welchen Hachette im Journal für Mathematik, Bd. I. S. 342. mittheilt.

Aus dem Obigen folgen ferner unmittelbar nachstehende Eigenschaften des einfachen Hyperboloïds:

2) „Das einfache Hyperboloïd kann auf zwei Arten durch Bewegung einer Geraden a oder A, welche sich längs drei festen Geraden A, $A_1$, $A_2$ oder a, b, c fortbewegt, erzeugt werden (III, 3.); oder es enthält zwei Schaaren von Geraden (oder zwei Systeme von Strahlen), welche einander schneiden, und welche die vorhin (III, 3.) angegebene Beziehung zu einander haben, nämlich:

„Dafs die Geraden jeder Schaar unter sich projectivisch sind, und zwar die andere Schaar Gerader zu Projectionsstrahlen haben."

„Dafs die Geraden jeder Schaar Axen projectivischer Ebenenb. sind, deren entsprechende Ebenen die andere Schaar Gerader zu Durchschnittslinien haben."

Da hiernach jede Gerade, aus der einen oder aus der andern Schaar, Axe eines Ebenenbüschels ist, dessen Ebenen durch die jedesmalige andere Schaar Gerader gehen, so folgt also von selbst die bekannte Eigenschaft:

3) „Dafs jede Ebene, welche das einfache Hyperboloïd in irgend einer Geraden schneidet, dasselbe allemal noch in irgend einer andern Geraden schneidet, und dafs diese zwei Geraden nicht zu einerlei Schaar gehören."

Jede solche Ebene, in der zwei Strahlen des Hyperboloïds liegen, heifst „Berührungsebene" des Hyperboloïds, und der Punkt, in welchem sich die zwei in ihr liegenden Strahlen schneiden, heifst ihr „Berührungspunkt." Mit Rücksicht auf diese Bemerkung lassen sich jetzt die obigen Sätze (§. 50.) wie folgt aussprechen:

4) „Alle Berührungsebenen eines Hyperboloïds, die durch irgend einen bestimmten Punkt D gehen, umhüllen einen Kegel zweiten Grades."

4) „Der gegenseitige Durchschnitt eines einfachen Hyperboloïds und irgend einer beliebigen Ebene E, ist irgend ein Kegelschnitt."

Da je zwei Gerade aus einer Schaar projectivisch sind und die andere Schaar zu Projectionsstrahlen haben (2.), und da sie im Allgemeinen, wenn sie nämlich nicht ähnlich sind, Parallelstrahlen haben (§. 9, I.), so müssen also irgend zwei Gerade aus der andern Schaar mit ihnen parallel sein, und daher folgt weiter:

5) „Dafs die zwei Schaaren Gerader eines einfachen Hyperboloïds paarweise parallel sind, d. h., dafs mit jeder beliebigen Geraden aus der einen Schaar eine bestimmte Gerade aus der andern Schaar parallel ist."

Später, im dritten Band, wird durch weitere Entwickelung zu dem letzten Satze noch folgende Eigenschaft hinzugefügt werden.

6) „Alle Ebenen, welche sich durch die verschiedenen Paare paralleler Geraden (5.) eines einfachen Hyperboloïds legen lassen, schneiden einander in einem und demselben Punkte, nämlich im Mittelpunkte des Hyperboloïds, und alle berühren einen bestimmten Kegel zweiten Grades, welcher Asymptoten-Kegel des Hyperboloïds genannt wird."

Angenommen es seien etwa a und A zwei parallele Gerade, so werden, wenn man sich den Ebenenbüschel A denkt, dessen Ebenen $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ..... sämmtlich der Geraden a parallel sein, und da dieselben durch die Schaar Gerader b, c, d, ...... gehen, zu welcher auch a gehört (3.), so folgt also durch Umkehrung der nachstehende Satz:

7) „**Legt man durch eine Schaar Gerader eines einfachen Hyperboloïds Ebenen, welche sämmtlich mit irgend einer zu dieser Schaar gehörigen Geraden (a) parallel sind, so schneiden sich alle diese Ebenen in einer und derselben Geraden (A), welche der andern Schaar angehört, und welche jener besondern Geraden (a) parallel ist.**"

Von den Geraden, die in einem einfachen Hyperboloïd liegen, ist noch folgende merkwürdige Eigenschaft, die sich auf ihre Richtung bezieht, anzugeben. Betrachtet man das Hyperboloïd als durch zwei Ebenenbüschel, etwa durch die Ebenenbüschel A, $A_1$ erzeugt, und denkt sich einen dritten Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, der dem A gleich, und der so liegt, dafs die entprechenden Ebenen (und also auch die Axen) der Ebenenbüschel A, $\mathfrak{A}$ parallel sind, und dafs sich die Axen der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $A_1$ schneiden, so werden also auch die zwei letzten Ebenenbüschel projectivisch sein und einen Kegel $[\mathfrak{A}A_1]$ zweiten Grades erzeugen (§. 38, II.). Da die entsprechenden Ebenen der Ebenenbüschel A, $\mathfrak{A}$ parallel sind, und mithin von den entsprechenden Ebenen des Ebenenbüschels $A_1$ in parallelen Geraden geschnitten werden, so folgt also, dafs die Strahlen des Hyperboloïds $[AA_1]$ mit den Strahlen des Kegels $[\mathfrak{A}A_1]$ parallel sind, d. h., es folgt daraus der nachstehende interessante Satz:

8) „**Alle Strahlen (Geraden) eines einfachen Hyperboloïds sind mit den Strahlen irgend eines bestimmten Kegels zweiten Grades parallel, so dafs, wenn man durch irgend einen beliebigen Punkt Strahlen sich denkt, welche den Strahlen des Hyperboloïds parallel sind,**

dieselben eine bestimmte Kegelfläche zweiten Grades erfüllen"*).

Aus dem letzten Satze und aus den obigen Sätzen (2, 4 rechts) folgt weiter:

9) „Dafs das einfache Hyperboloïd, aufser den obigen Fällen (1, 2.), unter andern auch durch folgende Angaben bestimmt, und auf die dabei bemerkte Art erzeugt wird; nämlich:

a) „Wenn irgend zwei Gerade, die zu einer Schaar gehören und irgend ein ebener Schnitt (4. rechts) desselben gegeben sind; d. h., wenn im Raume irgend ein Kegelschnitt K und irgend zwei ihn schneidende Gerade, etwa A, $A_1$, wovon aber keine in seiner Ebene liegt, und die auch nicht zusammen in einer Ebene liegen, gegeben sind; denn wird alsdann eine dritte Gerade a so bewegt, dafs sie stets die drei gegebenen festen Elemente K, A, $A_1$ schneidet, so beschreibt sie die genannte Fläche; oder wird alsdann durch jeden Punkt des Kegelschnitts K eine Gerade gelegt, welche die zwei gegebenen Geraden A, $A_1$ schneidet (II.), so sind alle jene Geraden die eine Schaar, und die zwei gegebenen Geraden gehören zu der anderen Schaar Gerader der genannten Fläche."

b) „Wenn irgend zwei Gerade, die zu einer Schaar gehören, und irgend ein Kegel, mit dessen Strahlen beide Schaaren Gerader parallel sind, gegeben

*) Die Strahlen des Hyperboloïds sind namentlich mit denen seines Asymptoten-Kegels (6.) parallel, und zwar liegt jeder Strahl des letzteren in der Mitte zwischen denjenigen beiden Strahlen des Hyperboloïds, mit welchen er parallel ist und mit denen er in einer Ebene liegt. Diese Eigenschaft nebst den obigen (3, 5, 6, 7, 8 und 9, b) habe ich schon bei einer früheren Gelegenheit, im Journal f. Mathem. Bd. 2. S. 268, mitgetheilt.

sind; d. h., wenn irgend ein Kegel K zweiten Grades und irgend zwei Gerade A, $A_1$, welche mit zwei Strahlen des Kegels parallel sind, aber nicht in einer Ebene liegen, gegeben sind; denn alsdann beschreibt eine dritte Gerade, die sich so bewegt, dafs sie stets die zwei gegebenen festen Geraden schneidet und beständig irgend einem Strahl des Kegels parallel läuft, die genannte Fläche; oder wird alsdann mit jedem Strahl des Kegels eine Gerade parallel gelegt, welche die zwei gegebenen Geraden schneidet (II.), so sind alle solche Geraden die eine Schaar und die zwei gegebenen Geraden gehören zu der anderen Schaar Gerader der genannten Fläche."

c) „Wenn irgend zwei zu derselben Schaar gehörige Gerade A, $A_1$ und die Richtungen irgend dreier andern Geraden gegeben sind; denn da diese Richtungen dreien Geraden sowohl von der einen als der andern Schaar angehören (5.), so sind also, zufolge (II.), diejenigen drei Geraden zu finden, welche die gegebenen zwei Geraden A, $A_1$ schneiden, d. h., welche nicht mit diesen aus gleicher Schaar sind, wo sodann der obige Fall (2.) eintritt; (auch kann der gegenwärtige Fall auf den vorhergehenden (b.) zurückgeführt werden)."

Endlich folgt noch, wie leicht zu sehen:

10) „Dafs das einfache Hyperboloïd der Form oder Gattung nach bestimmt ist, sobald irgend fünf Strahlen desselben der Richtung nach gegeben sind, d. h., es sind alsdann die Richtungen aller übrigen Strahlen, also der Asymptotenkegel, genau bestimmt."

52. In besonderen Fällen, wo die betrachteten projectivischen Gebilde entweder ähnlich sind, oder eigen-

thümliche Lage zu einander haben, erhält auch die durch sie erzeugte Fläche, welche vorhin im Allgemeinen das einfache Hyperboloïd war (§. 51, IV.), besondere Gestalt, oder geht in Grenzfälle über, die zu verschiedenen, theils bekannten, interessanten Sätzen führen.

I. Angenommen es seien irgend zwei Gerade aus einer der zwei Schaaren von Geraden $A, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ und $a, b, c, d, \ldots\ldots$, die einander schneiden (§. 51, IV.), etwa die zwei Geraden $A, A_1$, projectivisch ähnlich, so müssen ihre unendlich entfernten Punkte einander entsprechen (§. 13, I.), und also mufs einer ihrer Projectionsstrahlen, d. h., eine Gerade der andern Schaar $(a, b, c, \ldots\ldots)$, unendlich entfernt sein, und daher folgt weiter, dafs nicht nur jene zwei Geraden, sondern dafs je zwei Gerade der ersten Schaar $A, A_1, A_2, \ldots\ldots$ projectivisch ähnlich sind, weil sie denselben unendlich entfernten Projectionsstrahl haben. Denkt man sich den Ebenenbüschel, welcher irgend eine Gerade der ersten Schaar, etwa die Gerade $A_2$, zur Axe hat, so werden dessen Ebenen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots\ldots$ durch die zweite Schaar Gerader $a, b, c, \ldots\ldots$ gehen (§. 51, IV.), und es wird diejenige Ebene, welche nach der vorerwähnten unendlich entfernten Geraden gerichtet ist, nothwendiger Weise den Geraden $A, A_1$ parallel sein, weil sie nach ihren unendlich entfernten Punkten gerichtet ist, und folglich vereiniget diese Ebene die Richtungen der drei Geraden $A, A_1, A_2$ in sich; da ein Gleiches statt findet, wenn anstatt der Geraden $A_2$ irgend eine der übrigen Geraden $A_3, A_4, \ldots\ldots$ angenommen wird, und da durch die Richtungen der zwei ersten Geraden $A, A_1$ alle Richtungen einer Ebene bestimmt sind, so müssen folglich die Richtungen aller Geraden $A, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots$ einer einzigen Ebene

angehören, d. h., diese Schaar Gerader müssen sämmtlich einer Ebene parallel sein, und zwar kann durch jede Gerade eine solche Ebene gelegt werden, mit welcher alle parallel sind, und welche also alle Richtungen der Geraden enthält; alle solche Ebenen sind folglich unter sich parallel, sie bilden einen Ebenenbüschel, der aus einem System Parallelebenen besteht und dessen Axe die genannte unendlich entfernte Gerade der zweiten Schaar ist. Zur leichteren Festhaltung mag diese unendlich entfernte Gerade durch e bezeichnet werden, dann heifsen die Parallelebenen, nach der Reihe in der sie durch die Geraden $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,...... gehen, $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, ..... Diese Parallelebenen werden, da sie durch die erste Schaar Gerader $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ...... gehen, die andere Schaar längs derselben schneiden, und zwar werden sie dieselben projectivisch ähnlich schneiden, weil Parallelebenen alle Geraden, denen sie begegnen, in gleichem Verhältnifs theilen, und folglich werden auch die zweite Schaar Gerader a, b, c, d, ....., von der ersten projectivisch ähnlich geschnitten, daher müssen ihr auch dieselben Eigenschaften zukommen, wie der ersten, nämlich es mufs einer ihrer Projectionsstrahlen, d. h., eine Gerade der ersten Schaar, die $A_n$ heifsen mag, unendlich entfernt sein, ferner müssen sie sämmtlich einer Ebene parallel sein, so dafs durch jede von ihnen eine Ebene geht, mit welcher sie alle parallel sind, und dafs alle diese Ebenen, die nach der Reihe $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$, $\delta_n$, ..... heifsen, unter sich parallel sind, und einen Ebenenbüschel bilden, dessen Axe die genannte unendlich entfernte Gerade $A_n$ der ersten Schaar ist. Man stelle sich nun wiederum den vorhin erwähnten Ebenenbüschel $A_2$, dessen Ebenen $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, ....., durch die zweite Schaar Gerader a, b, c, ..... gehen, vor, und achte auf den

ebenen Strahlbüschel, in welchem er von einer der Parallelebenen $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$, ......, etwa von der Ebene $\alpha_n$, geschnitten wird, und welcher Strahlbüschel ebenfalls $\alpha_n$ heifsen soll, so werden offenbar die Strahlen $a_n$, $b_n$, $c_n$, ...... dieses Strahlbüschels der zweiten Schaar Gerader a, b, c,..... parallel sein (weil, wenn z. B. eine Gerade a einer Ebene $\alpha_n$ parallel ist, dann jede durch a gehende Ebene $\alpha_2$ die Ebene $\alpha_n$ in einem Strahl $a_n$ schneidet, der mit a parallel ist), woraus also folgt, dafs diese Schaar Gerader genau alle Richtungen eines ebenen Strahlbüschels $\alpha_n$, oder genau alle Richtungen einer Ebene $\alpha_n$, enthalten. Aus gleichen Gründen müssen auch die erste Schaar Gerader A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..... alle Richtungen eines ebenen Strahlbüschels, oder einer Ebene, nämlich der durch sie gehenden Parallelebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, ....., umfassen. Da der Ebenenbüschel $A_2$ einerseits mit dem ebenen Strahlbüschel $\alpha_n$ in Ansehung der Elemente $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, ..... und $a_n$, $b_n$, $c_n$, ....., und andererseits mit der Geraden A in Ansehung der Elemente $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, ..... und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ....., (wo nämlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..... die Punkte sind, in welchen die Gerade A zugleich von der zweiten Schaar Gerader a, b, c, ...... geschnitten wird) perspectivisch ist, so sind folglich der ebene Strahlbüschel $\alpha_n$ und die Gerade A in Ansehung der Elemente $a_n$, $b_n$ $c_n$, ...... und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...... projectivisch, und da ferner die Gerade A mit allen übrigen Geraden der ersten Schaar $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..... projectivisch ist, so folgt also: dafs die zweite Schaar Gerader a, b, c, ...... den Strahlen $a_n$, $b_n$, $c_n$, ..... eines ebenen Strahlbüschels $\alpha_n$ parallel sind, welcher mit den Geraden der ersten Schaar A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..... projectivisch ist. Desgleichen sind die erste Schaar Gerader A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ...... den Strahlen eines ebenen Strahlbüschels parallel, welcher mit der zweiten

Schaar Gerader a, b, c, ...... projectivisch ist, und welcher, z. B. in der Ebene $\varepsilon$ dargestellt, $\varepsilon$ heifsen soll. Da, wie vorhin bemerkt worden, die zwei Schaaren Gerader A, $A_1$, $A_2$, $A_3$,......, a, b, c, d,......mit zwei Ebenen $\varepsilon$, $\alpha_n$ (oder vielmehr mit zwei Systemen Parallelebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, ......, $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$, .....) parallel sind, und zwar genau alle Richtungen derselben erschöpfen, wogegen sie früher beim allgemeinen Falle mit den Strahlen eines Kegels zweiten Grades (des Asymptotenkegels) parallel waren (§. 51, IV. 8.), so folgt also, dafs dieser Kegel im gegenwärtigen Falle sich in jene zwei Ebenen aufgelöst hat, und somit in einen Grenzfall übergegangen ist. Jene Ebenen haben ferner die Eigenschaft, dafs, da jede durch eine endlich entfernte und durch eine unendlich entfernte Gerade geht, und da der Durchschnitt zweier solchen Geraden nothwendiger Weise unendlich entfernt sein mufs, ihre Berührungspunkte (§. 51, IV.) mit der krummen Fläche (welche durch die zwei Schaaren Gerader erfüllt wird) unendlich entfernt ist, woher denn jede solche Ebene „Asymptotenebene" genannt werden kann, so dafs also im gegenwärtigen Falle der Fläche zwei Systeme Asymptotenebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, ......, $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$, ...... zukommen. Die Schaar Gerader A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ...... sind projectivisch ähnlich, und zwar in Ansehung der Punkte, in welchen sie von den Asymptotenebenen $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$, ...... geschnitten werden (weil diese Ebenen durch die zweite Schaar Gerader a, b, c, ..... gehen), daher werden je zwei derselben, welche unter gleichen Winkeln zu diesen Ebenen geneigt sind, offenbar projectivisch gleich sein, und dafs sie in der That paarweise projectivisch gleich sind, und dafs ein Gleiches bei der zweiten Schaar Gerader a, b, c, d, ...... statt findet, kann leicht gezeigt werden. Denn man denke

sich zwei Asymptotenebenen, etwa $\varepsilon$ und $\alpha_n$, nenne ihre Durchschnittslinie X, und denke sich in der letzten Ebene $\alpha_n$ den ebenen Strahlbüschel $\alpha_n$, dessen Strahlen $a_n$, $b_n$, $c_n$, ...... den Geraden a, b, c, ..... parallel sind, so wird irgend ein bestimmter Strahl zu der Durchschnittslinie X senkrecht sein, und sodann werden von den übrigen Strahlen immer zwei und zwei sowohl mit jenem Strahl, als mit der Durchschnittslinie X gleiche Winkel bilden, und daher nothwendiger Weise zu der ersten Ebene $\varepsilon$ unter gleichen Winkeln geneigt sein, woraus dann weiter folgt, daſs auch die ihnen parallelen Geraden a, b, c, ..... paarweise mit der Ebene $\varepsilon$ gleiche Neigungswinkel bilden, und folglich paarweise projectivisch gleich sind. Diejenige Gerade aber, welche dem besondern Strahle, der zu der Durchschnittslinie X senkrecht ist, parallel ist, kann mit keiner andern projectivisch gleich sein; angenommen es sei dies die Gerade a, durch welche die Asymptotenebene $\alpha_n$ geht, so wird also a auf X senkrecht stehen; aus gleichen Gründen muſs unter der ersten Schaar Gerader A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ...... sich eine bestimmte befinden, die mit keiner andern projectivisch gleich ist, angenommen es sei die Gerade A, durch welche die Asymptotenebene $\varepsilon$ geht, so wird also auch A zu X senkrecht sein; demnach muſs denn auch die durch die zwei Geraden a, A gehende Berührungsebene (aA) auf der Durchschnittslinie X, und folglich auf beiden Systemen Asymptotenebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$......, $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$,...... zugleich senkrecht stehen; unter diesen Umständen wird X „Axe" und der Durchschnittspunkt der Geraden a, A, oder der Berührungspunkt der Ebene (aA), welcher 𝔄 heiſsen mag, wird „Scheitel" der krummen Fläche genannt. Wird die krumme Fläche von irgend einer beliebigen Ebene E geschnitten, so muſs der

Schnitt offenbar im Allgemeinen eine Hyperbel sein, denn da die Fläche zwei unendlich entfernte Gerade hat, mufs er zwei unendlich entfernte Punkte haben, nach denen nämlich die zwei Durchschnittslinien, in welchen die Asymptotenebenen $\varepsilon$, $\alpha_n$ von der Ebene E geschnitten werden, gerichtet sind, er mufs folglich eine Hyperbel sein, deren Asymptoten diesen Durchschnittslinien parallel sind; in dem besondern Falle aber, wo diese Durchschnittslinien der Axe X parallel sind (wo nämlich die schneidende Ebene E der Axe X, oder der Durchschnittslinie irgend zweier Asymptotenebenen parallel ist), und wo sie also nach einem einzigen unendlich entfernten Punkte gerichtet sind, geht die genannte Hyperbel in eine Parabel über; den Asymptoten der genannten Hyperbel sind ferner auch irgend zwei Gerade aus den zwei Schaaren Gerader A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ......, a, b, c, d, ..... parallel, nämlich jedesmal diejenigen zwei, welche jenen Durchschnittslinien parallel sind, in welchen die Asymptotenebenen $\varepsilon$, $\alpha_n$ von der Ebene E geschnitten werden. — Je zwei Gerade aus einer der zwei Schaaren A, $A_1$, $A_2$, ....., a, b, c, ......, wie z. B. die Geraden A, $A_1$, sind Axen zweier projectivischer Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen die jedesmalige andere Schaar zu Durchschnittslinien haben (§. 51, III.), diejenigen zwei entsprechenden Ebenen aber, welche die unendlich entfernte Gerade e der andern Schaar zur Durchschnittslinie haben, also die Ebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, müssen nothwendiger Weise parallel sein, und da dies die einzige Eigenthümlichkeit ist, wodurch sich in diesem Falle die zwei Ebenenbüschel auszeichnen, so ist klar, dafs umgekehrt, wenn irgend zwei projectivische Ebenenbüschel A, $A_1$ sich in solcher schiefer Lage befinden, wo irgend zwei entsprechende Ebenen parallel sind, alsdann alle oben

angegebenen Umstände und Eigenschaften statt finden müssen.

Unter diesen besondern Umständen heifst die krumme Fläche nicht mehr einfaches Hyperboloïd, sondern „hyperbolisches Paraboloïd." Aus der obigen Betrachtung folgen nachstehende Eigenschaften und Erzeugungsarten des hyperbolischen Paraboloïds.

1) „Das hyperbolische Paraboloïd hat unter andern folgende wesentliche Eigenschaften: a) es enthält zwei Schaaren Gerader $A, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$, a, b, c, d,...... die einander projectivisch ähnlich schneiden; auch sind die Geraden jeder Schaar paarweise projectivisch gleich, so dafs jede Gerade einer bestimmten andern Geraden projectivisch gleich ist; zwei Gerade A, a, aus jeder Schaar eine, machen hierin eine Ausnahme, d. h., sie haben nicht ihres Gleichen; b) zwei andere Gerade $A_n$, e, aus jeder Schaar eine, sind unendlich entfernt; c) durch jede Schaar Geraden geht ein System Parallelebenen, welche nach der unendlich entfernten Geraden der andern Schaar gerichtet, und welche daher Asymptotenebenen sind, so dafs es also zwei Systeme paralleler Asymptotenebenen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \ldots\ldots$ hat; d) jede Schaar Gerader sind den Asymptotenebenen, welche durch die andere Schaar gehen, parallel und sie umfassen genau alle Richtungen dieser Ebenen, so dafs die Strahlen eines Strahlbüschels in einer dieser Ebenen, genau die Richtungen aller jener Geraden darstellen, d. h., jeder Strahl ist einer bestimmten Geraden parallel, und auch umgekehrt; e) je-

der solche Strahlbüschel, dessen Strahlen mit der einen Schaar Gerader parallel sind, ist mit den Geraden der andern Schaar projectivisch (wobei nämlich jeder Punkt, in welchem eine dieser Geraden von einer von jenen Geraden geschnitten wird, demjenigen Strahl des Strahlbüschels entspricht, welcher der letztern Geraden parallel ist); f) jedes Paar projectivisch gleicher Gerade (a) aus der einen Schaar, sind zu den Asymptotenebenen, welche durch die andere Schaar gehen, unter gleichen Winkeln geneigt, und auch umgekehrt; g) jene zwei besondern Geraden A, a, die mit keiner andern projectivisch gleich sind, sind der Richtung nach zu den Durchschnittslinien der zwei Systeme Asymptotenebenen rechtwinklig, so dafs also ihre Ebene (aA) zu allen Asymptotenebenen und zu deren Durchschnittslinien rechtwinklig ist; ihr Durchschnittspunkt $\mathfrak{A}$ heifst Scheitel und die Durchschnittslinie X der durch sie gehenden Asymptotenebenen $\varepsilon, \varepsilon_n$ heifst Axe, ihre Ebene (aA), die Berührungsebene im Scheitel, ist die einzige Berührungsebene, die auf der Axe X rechtwinklig steht; h) endlich wird es (das Paraboloïd) von einer beliebigen Ebene E im Allgemeinen in einer Hyperbel geschnitten, deren Asymptoten den Durchschnittslinien, in welchen dieselbe die zwei Systeme Asymptotenebenen schneidet, und daher auch irgend zwei Geraden, die zu den zwei Schaaren Gerader (a) gehören, parallel sind, und nur in dem besondern Falle, wo die schneidende Ebene E der

Axe X parallel ist, wird es in einer Parabel geschnitten" *).

2) „Das hyperbolische Paraboloïd ist unter andern in folgenden Fällen bestimmt und wird auf die dabei bemerkten Arten erzeugt:

a) durch irgend zwei projectivisch ähnliche oder gleiche Gerade A, $A_1$, die im Raume beliebig schief liegen; nämlich die Geraden gehören zu der einen Schaar und ihre Projectionsstrahlen sind die sämmtliche andere Schaar Gerader;

b) durch zwei beliebige projectivische Ebenenbüschel A, $A_1$, die im Raume schief liegen, aber so, dafs irgend zwei entsprechende Ebenen parallel sind; nämlich die Axen der Ebenenbüschel gehören zu der einen Schaar, und die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen sind die andere Schaar Gerader;

c) durch zwei projectivische Ebenenbüschel, wovon der eine aus einem System Parallelebenen besteht, also eine unendlich entfernte Axe ($A_n$ oder e) hat, und wenn die Axe des andern jene Ebenen schneidet; nämlich ihre Axen gehören zu der einen Schaar und die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen sind die andere Schaar Gerader, und die Parallelebenen

*) Das sogenannte schiefe Viereck, welches M. Hirsch im zweiten Bande S. 238 seiner Sammlung geom. Aufgaben betrachtet, ist, wie man bemerken wird, ein begrenzter Theil eines hyperbolischen Paraboloïds, und die daselbst bewiesenen Eigenschaften folgen unmittelbar aus den hier oben stehenden.

ebenen sind das eine System Asymptotenebenen;

d) durch irgend drei Gerade A, $A_1$, $A_2$, die mit irgend einer Ebene $\varepsilon_3$ parallel sind, aber wovon keine zwei in einer Ebene liegen; nämlich die Ebene $\varepsilon_3$ ist eine Asymptotenebene, und die Geraden gehören zu der einen Schaar und alle sie schneidenden Geraden sind die andere Schaar Gerader, oder eine Gerade a, die sich so bewegt, dafs sie stets jene drei schneidet, beschreibt die andere Schaar Gerader, und somit die vorgenannte Fläche;

e) durch irgend zwei beliebige Gerade A, $A_1$ im Raume und durch eine beliebige, sie schneidende, Ebene $\alpha_n$, welche als Asymptotenebene angenommen wird; nämlich die Geraden gehören zu der einen Schaar, und alle Geraden, welche dieselben schneiden und mit der Ebene $\alpha_n$ parallel sind, sind die andere Schaar Gerader, oder eine Gerade a, die sich so bewegt, dafs sie stets jene zwei schneidet und beständig mit der Ebene parallel ist, beschreibt die genannte Fläche;

d) durch irgend eine Gerade A und irgend einen ebenen Strahlbüschel $\alpha_n$ die projectivisch sind, und so liegen, dafs jene nicht mit der Ebene des letzteren parallel ist; nämlich die Ebene des Strahlbüschels ist eine Asymptotenebene, und die Gerade gehört zu der einen Schaar und diejenigen Geraden die sie schneiden, und wovon jede demjenigen Strahl des Strahl-

büschels parallel ist, welcher ihrem Durchschnittspunkte entspricht, sind die andere Schaar Gerader, oder eine Gerade a, die sich so bewegt, dafs sie stets jene Gerade A schneidet und in jedem Augenblick dem ihrem Durchschnittspunkt entsprechenden Strahl des Strahlbüschels parallel ist, beschreibt die genannte Fläche" *).

Die Zahl dieser Fälle läfst sich leicht vermehren, z. B. dadurch, dafs auch die Hyperbel und Parabel (1, h.) als bestimmende Elemente angenommen werden **).

II. Vom hyperbolischen Paraboloïd findet ein besonderer Fall statt, der sich zum allgemeinen Falle ähnlich verhält, wie die gleichseitige Hyperbel zur beliebigen, nämlich derjenige Fall, wo die zwei Systeme Asymptotenebenen zu einander rechtwinklig sind. Haben A, a die ihnen bei der obigeu Betrachtung (I.) beigelegte Eigenschaft, dafs sie zu der Durchschnittslinie X der Asymptotenebenen $\varepsilon$, $\alpha_n$ rechtwinklig sind, so wird also im erwähnten besondern Falle sowohl A

*) Bei dem Grenzfalle, wo die gegebene Gerade A der Ebene des Strahlbüschels $\alpha_n$ parallel wird (sie in einem unendlich entfernten Punkte schneidet), tritt an die Stelle der genannten krummen Fläche, die Parabel, d. h., die auf die angegebene Art bestimmten Geraden (zweite Schaar Gerader), nebst der gegebenen Geraden A, sind die gesammten Tangenten einer Parabel, deren Ebene mit der Ebene des Strahlbüschels parallel ist.

**) Das synthetische Hauptmerkmal, wodurch sich die gegenwärtige Fläche vom einfachen Hyperboloïd unterscheidet, besteht nämlich darin, dafs sie zwei unendlich entfernte Gerade enthält; sobald daher aus irgend welchen Gründen folgt, dafs die erzeugte krumme Fläche eine (oder zwei) unendlich entfernte Gerade hat, so ist daraus zu schliefsen, dafs sie nicht mehr das allgemeine einfache Hyperboloïd, sondern die oben genannte Fläche ist.

zu der Ebene $\alpha_n$, als a zu der Ebene $\varepsilon$ senkrecht sein, und daher wird A zu allen Geraden a, b, c, d, ....., und a zu allen Geraden A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..... senkrecht sein, weil diese Schaaren Gerader jenen Ebenen $\alpha_n$, $\varepsilon$ parallel sind. Wird die krumme Fläche unter diesen Umständen „gleichseitiges hyperbolisches Paraboloïd" genannt, so folgen also für sie nachstehende besondere Eigenschaften und Erzeugungsarten (I, 1.):

1) „Beim gleichseitigen hyperpolischen Paraboloïd sind a) die zwei Systeme Asymptotenebenen zu einander rechtwinklig; b) eine bestimmte Gerade aus jeder Schaar Gerader ist zu allen Geraden der andern Schaar (und zu den durch diese gehenden Asymptotenebenen) rechtwinklig." Und umgekehrt:

2) „Wenn bei einem hyperbolischen Paraboloïd eine Gerade aus der einen Schaar zu irgend zwei Geraden der andern Schaar, oder zu einer Asymptotenebene, rechtwinklig ist, so ist es ein gleichseitiges."

3) „Das gleichseitige hyperbolische Paraboloïd wird bestimmt und erzeugt:

a) durch irgend zwei projectivisch ähnliche Gerade, sobald sie im Raume in solche schiefe Lage gebracht werden, dafs beide zu irgend einem und demselben Projectionsstrahl rechtwinklig sind;

b) durch irgend zwei projectivische Ebenenbüschel, sobald sie in solche schiefe Lage gebracht werden, dafs von den zwei entsprechenden Ebenenpaaren, welche die entsprechenden rechten Winkel einschliefsen (§. 30, VI.), das eine oder andere Paar parallel ist; nämlich die Durch-

schnittslinie des anderen Paars ist alsdann eine der genannten Geraden A, a;

c) durch zwei projectivische Ebenenbüschel, wovon der eine aus Parallelebenen besteht, auf welchen die Axe des anderen senkrecht steht; nämlich diese Axe ist alsdann eine der genannten Geraden A, a;

d) 1) durch irgend drei Gerade $A_1$, $A_2$, $A_3$, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, aber die irgend eine vierte Gerade a rechtwinklig schneiden; oder: 2) durch irgend zwei Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, wenn sie als zu einer Schaar Gerader, und zwar die eine als eine der genannten besonderen Geraden A, a, angesehen werden; nämlich eine dritte Gerade, die sich so bewegt, dafs sie stets jene zwei gegebenen festen Geraden scheidet, und zwar zu der einen stets rechtwinklig ist, beschreibt die genannte Fläche;

e) durch irgend zwei Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, und irgend eine Ebene, welche durch eine solche dritte Gerade geht, die der Richtung nach zu jenen zwei Geraden rechtwinklig ist (sie kann diese auch schneiden), wenn jene zwei Geraden als einer Schaar angehörend und die Ebene als Asymptotenebene angesehen wird; nämlich alsdann wird eine Gerade, die sich so bewegt, dafs sie stets jene zwei festen Geraden schneidet und beständig jener festen Ebene parallel bleibt, die genannte Fläche beschreiben; (die Asymptotenebene kann übrigens auch unter fol-

genden Bedingungen gegeben werden, als: welche auf irgend einer anderen Ebene, die den beiden Geraden parallel ist, rechtwinklig steht; oder welche solche Lage hat, dafs die Ebenen der Neigungswinkel, welche die zwei Geraden mit ihr bilden, parallel sind);

f) durch eine Gerade (A) und einen ebenen Strahlbüschel ($\alpha_n$), die projectivisch sind, und erstere auf der Ebene des letzteren senkrecht steht, und wenn die Gerade als der einen Schaar Gerader angehörend und die Strahlen des Strahlbüschels als der anderen Schaar Gerader parallel angenommen werden; nämlich alsdann wird eine Gerade, die sich so bewegt, dafs sie stets die gegebene feste Gerade schneidet und in jedem Augenblick demjenigen Strahl des Strahlbüschels parallel ist, welcher ihrem Durchschnittspunkt (in Ansehung der projectivischen Beziehung) entspricht, die oben genannte Fläche beschreiben."

53. Andere besondere Fälle (§. 52.), wobei in Hinsicht der Erzeugungsart, der Gestalt und der Eigenschaften der durch projectivische Gebilde erzeugten krummen Flächen eigenthümliche Umstände statt finden, sind folgende:

I. Zunächst mögen einige Eigenschaften, deren Richtigkeit sich aus den ersten Elementen der Geometrie ergiebt, vorangeschickt werden. Wenn man nämlich in einer Ebene zwei beliebige Strahlbüschel B, $B_1$ betrachtet, so findet man, dafs auf jedem Strahl des einen ein bestimmter Strahl des andern rechtwinklig steht; angenommen es seien die Strahlen a, b, c, d, ....

des Strahlbüschels B nach der Reihe zu den Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, .... des Strahlbüschels $B_1$ rechtwinklig. Die Durchschnittspunkte der zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare liegen in einer Kreislinie, welche die Gerade $BB_1$, die die Mittelpunkte der Strahlbüschel verbindet, zum Durchmesser hat. Daher sind die Strahlbüschel in Ansehung der zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare projectivisch (§. 38, III.). Also:

„Irgend zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$, die in einer Ebene liegen, sind in Ansehung der zu einander rechtwinkligen Strahlen a, b, c, d, .... und $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, .... projectivisch, und erzeugen einen Kreis, in welchem ihre Mittelpunkte die Endpunkte eines Durchmessers sind" *).

Mittelst dieses einfachen Satzes läfst sich nun leicht zeigen, dafs bei zwei ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ die in einem Strahlbüschel D liegen, und bei zwei Ebenenbüscheln A, $A_1$ die im Raume oder in einem Strahlbüschel D beliebig liegen, ähnliche Sätze statt finden, aus denen sich mehrere merkwürdige Folgerungen ziehen lassen.

II. Man denke sich zwei Ebenenbüschel A, $A_1$, deren Axen beliebige gegenseitige Lage haben (nur

---

*) Die bekannte Umkehrung dieses Satzes heifst:

„Bewegt sich ein rechter Winkel ($aa_1$) in einer Ebene so, dafs seine Schenkel a, $a_1$ stets durch irgend zwei feste Punkte B, $B_1$ gehen, so durchläuft sein Scheitel ($aa_1$) eine Kreislinie, welche den Abstand der festen Punkte von einander zum Durchmesser hat."

Dieser und der obige Satz sind übrigens nur besondere Fälle von denjenigen Sätzen, die man unter den gleichen Bedingungen erhält, wenn anstatt des rechten Winkels, irgend ein anderer bestimmter Winkel angenommen wird.

nicht der Richtung nach zu einander rechtwinklig sind), so wird auf jeder Ebene des einen Ebenenbüschels irgend eine bestimmte Ebene des andern rechtwinklig sein, so dafs also ihre Ebenen paarweise zu einander rechtwinklig sind. Angenommen es seien die Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ..... des Ebenenbüschels A nach der Reihe zu den Ebenen $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, ..... des Ebenenbüschels $A_1$ rechtwinklig, und die Durchschnittslinien der zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare heifsen nach der Reihe $a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$, ...... Man denke sich ferner irgend eine Ebene E, welche zu der Axe des einen Ebenenbüschels, etwa zu A, rechtwinklig ist, so wird dieselbe die Ebenenbüschel A, $A_1$ in zwei ebenen Strahlbüscheln B, $B_1$ schneiden, deren Mittelpunkte B, $B_1$ nämlich in den Axen A, $A_1$, und deren Strahlen a, b, c, ....; $a_1$, $b_1$, $c_1$, ..... in den Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ....., $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ ..... liegen (§. 27, II.), und es wird die Ebene E zu allen Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... rechtwinklig sein, weil sie es zu der Axe A ist. Sodann ist klar, dafs, da z. B. die Ebenen E, $\alpha_1$ beide zu der Ebene $\alpha$ rechtwinklig sind, auch ihre Durchschnittslinie $a_1$ zu derselben rechtwinklig ist, und dafs diese somit auch zu der Geraden a senkrecht ist, weil letztere in der Ebene $\alpha$ liegt; und da aus gleichen Gründen folgt, dafs je zwei gleichnamige Strahlen der Strahlbüschel B, $B_1$, also b und $b_1$, c und $c_1$, d und $d_1$, u. s. w. zu einander rechtwinklig sind, so geht also daraus hervor: a) dafs die Durchschnittspunkte aller dieser Strahlenpaare in einer Kreislinie liegen, welche die Gerade $BB_1$, die die Mittelpunkte der Strahlbüschel B, $B_1$ verbindet, zum Durchmesser hat (I.); woraus denn weiter folgt, b) dafs die Strahlbüschel B, $B_1$, in Ansehung jener Strahlenpaare, projectivisch sind, und c) dafs also auch die Ebenenbüschel A, $A_1$ in Ansehung ihrer

zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare $\alpha$ und $\alpha_1$, $\beta$ und $\beta_1$, $\gamma$ und $\gamma_1$, u. s. w. projectivisch sind (weil sie mit jenen Strahlbüscheln B, $B_1$ perspectivisch sind), und dafs sie daher d) im Allgemeinen ein besonderes einfaches Hyperboloïd (§. 51, IV, 1.), oder e) wenn ihre Axen einander schneiden, einen besonderen Kegel zweiten Grades (§. 38, II.) erzeugen, welches oder welcher von der Ebene E in dem genannten Kreise (a) geschnitten wird, dessen Durchmesser $BB_1$ zu der Axe A senkrecht ist (weil diese zu E es ist), so dafs also f) dieser Durchmesser $BB_1$ ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloïd beschreibt (§. 52, II, 3, d, 2.), wenn die Ebene E sich selbst parallel fortbewegt wird. Endlich folgt noch, g) dafs der Ebenenbüschel A und der ebene Strahlbüschel $B_1$, in Ansehung ihrer zu einander senkrechten Elementenpaare $\alpha$ und $a_1$, $\beta$ und $b_1$, $\gamma$ und $c_1$, u. s. w. projectivisch sind, weil beide es mit dem ebenen Strahlbüschel B sind; oder man kann offenbar umgekehrt behaupten, dafs, wenn man aus irgend einem Punkt $B_1$ Lothe $a_1$, $b_1$, $c_1$, ..... auf die Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... eines beliebigen Ebenenbüschels A fället, alsdann alle Lothe einen ebenen Strahlbüschel $B_1$ bilden, dessen Ebene E (oder $B_1$) zu der Axe A des Ebenenbüschels senkrecht ist, und der mit diesem Ebenenbüschel, in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Elementenpaare, projectivisch ist, und zwar dergestalt, dafs je zwei entsprechende Winkel, wie etwa (ab) und $(\alpha\beta)$, d. h., der Winkel irgend zweier Strahlen a, b und der Winkel ihrer entsprechenden Ebenen $\alpha$, $\beta$, gleich sind oder zusammen zwei Rechte betragen. Es ist ferner Folgendes zu bemerken. h) Fället man aus einem beliebigen Punkte D Lothe a, b, c, .....; $a_1$, $b_1$, $c_1$, ..... auf die Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .....; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, ..... der Ebenenbüschel A, $A_1$, so bilden

dieselben zwei ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, die beziehlich mit den Ebenenbüscheln A, $A_1$ projectivisch sind (g), sie sind folglich auch unter sich projectivisch, und zwar dergestalt, dafs je zwei entsprechende Strahlen, wie etwa a und $a_1$, zu einander rechtwinklig sind, weil diese nämlich Lothe auf Ebenen $\alpha$ und $\alpha_1$ sind, welche aufeinander senkrecht stehen (g); also werden die Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ im Allgemeinen einen Kegel zweiten Grades erzeugen. (Dasselbe folgt auch dadurch, dafs im Falle die Axen A, $A_1$ sich schneiden (e), man annimmt die oben genannte Ebene E gehe durch ihren Durchschnittspunkt, welcher D heifsen mag, stehe auf der Axe A senkrecht und schneide den anderen Ebenenbüschel $A_1$ in einem Strahlbüschel $B_1$, so dafs also die Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$,..... des letzteren immerhin, wie bei der obigen Betrachtung, zu den Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,..... des Ebenenbüschels A senkrecht sind, und dafs man sich ferner durch den Punkt D eine beliebige andere Ebene denkt, die den Ebenenbüschel A in einem ebenen Strahlbüschel B schneidet, so werden alsdann die Strahlen a, b, c, ..... des letzteren zu den Strahlen $a_1$, $b_1$, $c_1$, ..... des Strahlbüschels $B_1$ rechtwinklig sein, und es werden beide Strahlbüschel B, $B_1$, in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare, projectivisch sein, weil sie es mit den Ebenenbüscheln A, $A_1$ sind (§. 30, V.), und folglich werden sie einen Kegel zweiten Grades erzeugen). i) Werden die Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ (h.) durch zwei beliebige Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ geschnitten, so werden diese, in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, .....; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ....., in welchen sie von den Strahlen a, b, c, .....; $a_1$, $b_1$ $c_1$, ..... der Strahlbüschel getroffen werden, projectivisch sein (weil letztere unter sich es sind), so dafs also je zwei entsprechende Punkte derselben, wie etwa $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, von dem Punkte

D aus unter einem rechten Winkel $(aa_1)$ gesehen werden, und so dafs, im Falle die Geraden nicht in einer Ebenen liegen, sie ein einfaches Hyperboloïd (§. 51, IV, 1.), und im Falle, wo sie in einer Ebene liegen, einen Kegelschnitt erzeugen.

Aus dieser Betrachtung fliefst nachstehende Reihe von Sätzen.

1) „Zwei Ebenenbüschel A, $A_1$, deren Axen nicht in einer Ebene liegen, sind in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare $\alpha$ und $\alpha_1$, $\beta$ und $\beta_1$, $\gamma$ und $\gamma_1$ u. s. w., projectivisch (c.) und erzeugen also ein besonderes einfaches Hyperboloïd, welches von jeder Ebene, die zu der Axe des einen oder andern Ebenenbüschels senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, von welchem die Endpunkte eines Durchmessers in jenen Axen liegen, und wo alle solche Durchmesser, bei dem einen oder anderen System von Kreisen, in einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloïd liegen." Oder:

2) „Drehen sich die Seitenflächen $\alpha$, $\alpha_1$ eines rechten Flächenwinkels $(\alpha\alpha_1)$ um irgend zwei feste Gerade (Axen) A, $A_1$, die nicht in einer Ebene liegen, so beschreibt die Kante $a_2$ desselben ein besonderes einfaches Hyperboloïd, welches durch die zwei festen Geraden geht, und aufserdem die Eigenschaft hat, dafs es von jeder Ebene E, die zu der einen oder andern Geraden senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, und dafs die Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises in jenen Geraden liegen, und dafs alle solche Durchmesser des einen oder andern Systems

von Kreisen, für sich genommen, in einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloïd liegen"*).

3) „Zwei ebene Strahlbüschel $B, B_1$, die in einem Strahlbüschel D liegen (II.), sind in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare projectivisch und erzeugen also einen besondern Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt in D liegt, und der die Ebenen der Strahlbüschel $B, B_1$ in denjenigen Strahlen berührt, welche zu ihrer Durchschnittslinie senkrecht sind, in der offenbar die ihnen entsprechenden Strahlen vereinigt sein müssen (§. 38, II.)"

3) „Zwei Ebenenbüschel $A, A_1$, die in einem Strahlbüschel D liegen, sind in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare projectivisch, und erzeugen also einen besonderen Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt in D liegt, und welcher von jeder Ebene E, die zu der Axe des einen oder anderen Ebenenbüschels senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, von welchem die Endpunkte eines Durchmessers jedesmal in jenen zwei Axen liegen."

Oder:

4) „Dreht sich ein rechter Winkel ($aa_1$) so um seinen festen Scheitelpunkt D, der in der Durchschnittslinie irgend zweier festen Ebenen $B, B_1$ liegt, dafs sich seine Schenkel $a, a_1$ stets in diesen Ebenen befinden, so berührt seine Ebene beständig einen bestimmten besonderen Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt jener feste

4) „Bewegt sich ein rechter Flächenwinkel ($\alpha\alpha_1$) so, dafs seine Ebenen $\alpha, \alpha_1$ stets durch irgend zwei feste, sich in einem Punkte D schneidende, Gerade $A, A_1$ gehen, so beschreibt seine Kante einen bestimmten besonderen Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt jener Durchschnittspunkt D ist, und welcher von jeder Ebene E, die zu der

*) Den ersten Theil dieses Satzes hat Binet zuerst bewiesen, im zweiten Bande S. 71. der *Correspondance sur l'Ecole impériale Polytechnique*. Als ich im *Journal für Mathematik* II. Bd. den Satz zum beweisen vorlegte, sind durch ein Versehen einige Eigenschaften weggelassen worden.

Scheitel D ist, und welcher die zwei festen Ebenen in denjenigen Geraden berührt, die zu ihrer gegenseitigen Durchschnittslinie senkrecht sind."

einen oder anderen jener festen Geraden senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, von welchem die Endpunkte eines Durchmessers in diesen Geraden liegen" *).

Oder die letzteren Sätze (3.) und (4.) lassen sich, zufolge (§. 34. u. §. 48.), wie folgt in sphärische Sätze übertragen:

5) „Irgend zwei Hauptkreise $H$, $H_1$ einer Kugelfläche sind in Ansehung ihrer Punktenpaare, die um einen Quadranten von einander entfernt sind, projectivisch, und erzeugen also einen besondern sphärischen Kegelschnitt, der jene Hauptkreise in denjenigen Punkten berührt, welche um einen Quadranten von ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten abstehen."

5) „Irgend zwei Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ auf einer Kugelfläche sind in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Strahlenpaare projectivisch, und erzeugen also einen besondern sphärischen Kegelschnitt, der durch die Mittelpunkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ der Strahlbüschel geht, und dessen Tangenten in diesen Punkten zu dem durch diese gehenden Hauptkreise $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ rechtwinklig sind."

Oder:

6) „Bewegt sich ein Quadrant $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ auf einer Kugelfläche so, daſs seine Endpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ stets in irgend zwei festen Hauptkreisen $H$, $H_1$ liegen, so berührt er beständig einen bestimmten sphärischen Kegelschnitt, der auch die festen Hauptkreise berührt, und zwar in denjenigen Punkten, welche in der Mitte

6) „Bewegt sich ein sphärischer rechter Winkel $(aa_1)$ so, daſs seine Schenkel $a$, $a_1$ stets durch irgend zwei feste Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ gehen, so durchläuft sein Scheitelpunkt $(aa_1)$ einen bestimmten sphärischen Kegelschnitt, der durch die festen Punkte geht und dessen Tangenten in diesen Punkten auf dem durch die-

*) Diesen Satz scheint Hachette zuerst bewiesen zu haben, *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique* tom. I, p. 179.

zwischen ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten liegen." Oder: „Ist der Winkel an der Spitze eines sphärischen Dreiecks der Gröfse und Lage nach gegeben, und ist die Grundlinie desselben ein Quadrant, so berührt diese in allen ihren verschiedenen Lagen stets einen bestimmten sphärischen Kegelschnitt, der die Schenkel des festen Winkels in denjenigen Punkten berührt, welche vom Scheitel des Winkels um den Quadranten entfernt sind."

selben gehenden Hauptkreise senkrecht sind." Oder: „Ist die Grundlinie eines sphärischen Dreiecks der Gröfse und Lage nach gegeben, und ist der Winkel an der Spitze desselben ein rechter, so ist der Ort dieser Spitze ein bestimmter sphärischer Kegelschnitt, welcher durch die Endpunkte der festen Grundlinie geht, und dessen Tangenten in diesen Punkten zu der Grundlinie senkrecht sind."

Es folgt weiter (i.).

7) „Irgend zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume sind in Ansehung ihrer Punktenpaare, welche von irgend einem beliebigen Punkte D aus unter rechten Winkeln gesehen werden, d. h., nach welchen von diesem Punkte aus Strahlenpaare gehen, die zu einander rechtwinklig sind, projectivisch, so dafs die Schaar Gerader, welche jene Punktenpaare verbinden, in einem einfachen Hyperboloïd liegen, und dafs die Ebenen aller jener rechten Winkel einen Kegel zweiten Grades berühren, dessen Mittelpunkt in dem genannten Punkte D liegt (§. 50.)" Oder:

8) „Bewegt sich ein rechter Winkel ($aa_1$) so um seinen Scheitel, der in irgend einem festen Punkte D liegt, dafs seine Schenkel a, $a_1$ stets irgend zwei feste Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, die nicht in einer Ebene liegen, schneiden; so beschreibt die Gerade, welche durch die jedesmaligen

beiden Durchschnittspunkte geht, ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch die zwei festen Geraden liegen, und so berührt die Ebene des bewegten Winkels stets einen bestimmten Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt jener feste Punkt D ist, und welcher auch von den zwei festen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ berührt wird" *).

9) „Wenn bei den beiden letzten Sätzen (7. und 8.) alle Bedingungen dieselben bleiben,

*) Poncelet hat diesen Satz zuerst bekannt gemacht, in einem Memoire, welches er der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorlegte. Er folgerte ihn aus dem obigen Satze von Binet (2.). Die Sätze (7. und 8.) sind nämlich, auch zufolge der gegenwärtigen Entwickelung, als Gegensätze der Sätze (1. und 2.) anzusehen, und hätten als solche neben diese gestellt werden können. So ließsen sich z. B. die Sätze (2. und 8.), einander entgegengesetzt, wie folgt aussprechen:

„Bewegt sich ein rechtwinkliger dreiflächiger Körperwinkel $\alpha\alpha_1$E so, daſs die Hypotenusen-Fläche E stets in einer festen Ebene E bleibt, während die zwei übrigen Seitenflächen $\alpha$, $\alpha_1$ sich um irgend zwei feste Gerade A, $A_1$ drehen, so beschreibt die Kante $a_2$ des rechten Winkels ($\alpha\alpha_1$) ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch die zwei festen Geraden A, $A_1$ liegen, und so durchläuft der Scheitel des Körperwinkels einen bestimmten Kegelschnitt, nämlich den gegenseitigen Durchschnitt der festen Ebene E und des Hyperboloïds."

„Bewegt sich ein veränderliches rechtwinkliges Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$D so, daſs der Scheitel D des rechten Winkels stets in einem festen Punkte D bleibt, während die zwei übrigen Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ sich längs irgend zwei festen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ fortbewegen, so beschreibt die Hypotenuse $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch die zwei festen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ liegen, und so bewegt sich die Ebene des Dreiecks als Berührungsebene eines bestimmten Kegels zweiten Grades, nämlich des Berührungskegels aus dem Punkte D an das Hyperboloïd."

nur dafs die gegebenen festen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in einer Ebene E liegen sollen, so bleiben auch die Folgerungen die nämlichen, aufser dafs alsdann an die Stelle des einfachen Hyperboloïds irgend ein Kegelschnitt tritt, der durch die Geraden erzeugt wird, also in ihrer Ebene liegt, und durch welchen der genannte Kegel D geht." „Und wenn ferner insbesondere der feste Punkt D so liegt, dafs der Strahl, welcher ihn mit dem Durchschnittspunkte der festen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ verbindet, zu den beiden letzteren senkrecht ist, so ist alsdann der genannte Kegelschnitt eine Hyperbel, welche die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ zu Asymptoten hat." Die Richtigkeit des letzten Falles folgt, wie man leicht bemerken wird, daraus, dafs die unendlich entfernten Punkte der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ offenbar den in ihrem gegenseitigen Durchschnitte vereinigten Punkten entsprechen (§. 40, I.). Auch kann dieser Fall dadurch aus dem obigen Satze (4, links) gefolgert werden, dafs man die dort genannten Ebenen B, $B_1$ durch eine solche dritte Ebene E schneidet, welche zu ihrer Durchschnittslinie senkrecht ist, und welche mithin mit denjenigen beiden Strahlen, in welchen jene Ebenen von dem daselbst genannten Kegel D berührt werden, parallel ist (§. 36, III.).

10) „Steht die Axe eines Ebenenbüschels A auf der Ebene eines ebenen Strahlbüschels $B_1$ senkrecht, so sind beide Gebilde in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Elementenpaare projectivisch (g.) und erzeugen einen Kreis, welcher in der Ebene des Strahlbüschels liegt, und den Abstand des Punktes B, in welchem jene Axe A diese Ebene trifft,

vom Mittelpunkte $B_1$ des Strahlbüschels, zum Durchmesser hat."

Da durch drei Paar entsprechende Elemente die projectivische Beziehung zweier Gebilde bestimmt ist, so folgen aus den obigen Sätzen (1, 3, 5, 7 und 10.), durch Umkehrung, die nachstehenden:

11) a) „Sobald bei zwei projectivischen Gebilden — seien es 1) zwei Ebenenbüschel A, $A_1$, deren Axen in einer Ebene liegen mögen (3.) oder nicht (1.); oder 2) zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$ die in einer Ebene E (1.) oder in einem Strahlbüschel D (3.) liegen; oder 3) zwei sphärische Hauptkreise H, $H_1$ (5.); oder 4) zwei sphärische Strahlbüschel 𝔅, $𝔅_1$ (5.); oder endlich 5) ein Ebenenbüschel A und ein ebener Strahlbüschel $B_1$ (10.) — irgend drei entsprechende Elementenpaare zu einander rechtwinklig sind, so sind je zwei der übrigen entsprechenden Elemente ebenfalls zu einander rechtwinklig;" und b) „Sobald bei zwei projectivischen Geraden 𝔄, $𝔄_1$ (7.) irgend drei Paar entsprechende Punkte von irgend einem Punkte D aus unter rechten Winkeln gesehen werden, so findet für jedes der übrigen Paare entsprechender Punkte ein Gleiches statt."

Und daraus folgt weiter:

12) a) „Dafs bei zwei beliebig liegenden projectivischen Gebilden — von der Art, wie sie so eben genannt worden (11, a.), ausgenommen der fünfte Fall — im Allgemeinen und höchstens nur zwei Paar entsprechende Elemente zu einander rechtwinklig sind, nämlich es sind entweder zwei, oder nur ein, oder gar kein Paar zu einander rechtwinklig, eben so, wie

wie bei zwei projectivischen Gebilden, wenn sie in- oder aufeinander liegen, entsprechende Elementenpaare zusammenfallen;" und b) „dafs bei zwei beliebig liegenden projectivischen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ von irgend einem beliebigen Punkte aus, gleicherweise entweder zwei oder nur ein, oder gar kein Paar entsprechende Punkte unter rechten Winkeln gesehen werden." Und zwar sind die erwähnten Elementenpaare wie folgt leicht zu finden. Sind z. B. zwei beliebig liegende projectivische Ebenenbüschel $A$, $A_1$ gegeben, so denke man sich einen solchen dritten Ebenenbüschel $A_2$, der mit $A_1$ einerlei Axe hat, und der mit $A$ in Ansehung ihrer zu einander rechtwinkligen Ebenenpaare projectivisch ist (1.), so sind alsdann auch $A_1$ und $A_2$ projectivisch, und so viele entsprechende Elementenpaare der letzteren zusammenfallen, eben so viele entsprechende Elementenpaare von $A$, $A_1$ müssen offenbar zu einander rechtwinklig sein; die vereinigten entsprechenden Elementenpaare von $A_1$, $A_2$ werden aber nach (§. 31, III.) gefunden. Bei den übrigen Paaren von Gebilden ist die Lösung ähnlich.

Die obigen Sätze (2, 4 und 6.) können unter andern in folgende Grenzfälle übergehen:

13) „Wenn nämlich in (2.) und in (4.) die gegebenen festen Geraden $A$, $A_1$ zu einander rechtwinklig sind (bei (2.) der Richtung nach), so treten offenbar an die Stelle sowohl des einfachen Hyperboloïds (2.) als des Kegels (4.), zwei Ebenen, wovon jede durch eine der beiden festen Geraden geht und zu der jedesmaligen andern senkrecht ist, und die daher auch zu einander senkrecht sind; d. h., sollen die Seitenflächen $\alpha$, $\alpha_1$ eines rechten Flächenwin-

kels ($aa_1$) durch jene zwei zu einander rechtwinkligen festen Geraden A, $A_1$ gehen, so ist der Ort seiner Kante $a_2$ auf die zwei genannten Ebenen beschränkt. Und wenn in (4 links) die gegebenen festen Ebenen B, $B_1$ zu einander rechtwinklig sind, so reduzirt sich der daselbst genannte Kegel auf diejenigen Geraden, in welchen er zuvor jene Ebenen berührte, oder vielmehr geht die Kegelfläche in die Fläche des durch diese Geraden eingeschlossenen Winkels über; denn alsdann ist jede von diesen zwei genannten Geraden zu allen Geraden in der andern Ebene senkrecht. Aehnliches folgt für die sphärischen Sätze (6.)."

14) „Zwei gegebene projectivische Gebilde, nämlich entweder $\alpha$) zwei Ebenenbüschel A, $A_1$, oder $\beta$) zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$, so zu legen, dafs ihre entsprechenden Elementenpaare zu einander rechtwinklig sind; und ferner: $\gamma$) wenn zwei projectivische Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in beliebiger schiefer Lage im Raume gegeben sind, denjenigen Punkt D zu finden, von welchem aus ihre entsprechenden Punktenpaare unter rechten Winkeln gesehen werden."

Auflösung. $\alpha$) Man halte den einen Ebenenbüschel, etwa A, in seiner gegebenen Lage fest, und fälle aus einem beliebigen Punkte $B_1$ Lothe auf seine Ebenen, so dafs ein ebener Strahlbüschel $B_1$ entsteht, welcher mit dem Ebenenbüschel A (10.), und mithin auch mit dem Ebenenbüschel $A_1$, projectivisch ist. Sodann kommt es nur darauf an, den Ebenenbüschel $A_1$ so zu legen, dafs er mit dem festen Strahlbüschel $B_1$ perspectivisch ist. Man suche zu diesem Endzweck die Schenkel $s_1$, $t_1$ und Seitenflächen $\sigma_1$, $\tau_1$ der entspre-

chenden rechten Winkel der beiden Gebilde $B_1$, $A_1$ (§. 30, VI.). Da die Strahlen $s_1$, $t_1$, der Voraussetzung gemäfs, fest sind, so ist der Ort der Kante $A_1$ des rechten Flächenwinkels $(\sigma_1\, \tau_1)$, wenn seine Flächen durch jene Strahlen gehen sollen, auf diejenigen zwei Ebenen S, T beschränkt, welche durch $s_1$, $t_1$ gehen und beziehlich zu $t_1$, $s_1$ senkrecht sind (13.). Sind ferner $\alpha_1$, $\beta_1$ irgend zwei andere zu einander rechtwinklige Ebenen des Ebenenbüschels $A_1$, und sind $a_1$, $b_1$ die ihnen entsprechenden Strahlen im Strahlbüschel $B_1$, so ist der Ort der Kante $A_1$ des rechten Flächenwinkels $(\alpha_1 \beta_1)$, wenn seine Flächen durch jene Strahlen gehen sollen, auf eine besondere Kegelfläche K zweiten Grades beschränkt (4.), welche durch die Strahlen $a_1$, $b_1$ geht, und die daher nothwendiger Weise von der einen oder andern der vorigen Ortsebenen S, T in irgend zwei Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ geschnitten wird, in denen allein die Kanten der zwei genannten Flächenwinkel $(\sigma_1 \tau_1)$, $(\alpha_1 \beta_1)$ zusammentreffen können, und in denen folglich allein die Axe $A_1$ liegen kann, um der Aufgabe zu genügen, d. h., um damit der Ebenenbüschel $A_1$ mit dem festen Strahlbüschel $B_1$ perspectivisch sei. Um die genannten Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ in der That zu finden, kann man danach z. B. wie folgt verfahren. Es stelle (Fig. 51.) das Papier die Ebene des Strahlbüschels $B_1$ vor, wo man sich also die Ebenen S, T durch die Strahlen $s_1$, $t_1$ und senkrecht auf jener Ebene zu denken hat. Da die genannten zwei rechtwinkligen Ebenenpaare $\sigma_1$ und $\tau_1$, $\alpha_1$ und $\beta_1$ des Ebenenbüschels $A_1$ nothwendiger Weise abwechselnd aufeinander folgen, etwa in der Ordnung $\sigma_1$, $\alpha_1$, $\tau_1$, $\beta_1$, so müssen auch die ihnen entsprechenden Strahlenpaare $s_1$ und $t_1$, $a_1$ und $b_1$ im Strahlbüschel $B_1$ abwechselnd aufeinander folgen, und zwar nach der Ordnung $s_1$, $a_1$, $t_1$, $b_1$

(§. 29, II.). Da ferner der genannte Kegel K von jeder Ebene E, welche zu einem der zwei Strahlen $a_1$, $b_1$ senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird, wovon die Endpunkte eines Durchmessers in diesen Strahlen liegen (4. rechts), so ist also jede Gerade $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, die man zwischen diesen Strahlen und z. B. auf $a_1$ senkrecht zieht, ein solcher Durchmesser, der nothwendiger Weise jedesmal einen der zwei andern Strahlen $s_1$, $t_1$, hier $t_1$, schneiden mufs; über diesem Durchmesser beschreibe man sofort in der zugehörigen Ebene E, welche die Ebene T in einer Geraden ${}_1\mathfrak{a}^1\mathfrak{a}$ schneidet, den genannten Kreis, so wird dieser jener Geraden ${}_1\mathfrak{a}^1\mathfrak{a}$ in zwei Punkten ${}_1\mathfrak{a}$, ${}^1\mathfrak{a}$ begegnen, durch welche die verlangten Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ gehen. (Man könnte übrigens auch über demselben Durchmesser in der Ebene der Figur einen Kreis beschreiben, und hier die Länge der Abschnitte ${}_1\mathfrak{a}\mathfrak{t}$, ${}^1\mathfrak{a}\mathfrak{t}$, so wie die Winkel, welche die Strahlen ${}_1A$, ${}^1A$ mit dem Strahle $t_1$ einschliefsen, oder mit einem Wort, die Dreiecke, $\mathfrak{a}\mathfrak{t}B_1$, ${}^1\mathfrak{a}\mathfrak{t}B_1$ finden, wie leicht zu sehen ist). Hat man auf vorstehende Weise zwei bestimmte Lagen ${}_1A$, ${}^1A$ für die Axe $A_1$ gefunden, so kennt man zugleich alle möglichen Lagen derselben, indem sie aus jenen dadurch, und nur dadurch, in andere, ihr zukommende, Lagen übergehen kann, wenn sie mit sich selbst parallel fortbewegt wird. Es ist daher, wenn die Lage der Axe A irgendwo fest angenommen wird, die Lage, oder der Ort, der Axe $A_1$ nicht beschränkt, sondern nur ihre Richtung, und zwar ist diese auf nur zwei bestimmte Richtungen ${}_1A$, ${}^1A$ beschränkt. Die Axe $A_1$ kann daher auch in solche Lage gebracht werden, wo sie jene andere Axe schneidet, und wo alsdann die Strahlbüschel A, $A_1$ den mehrerwähnten besondern Kegel erzeugen. — Wenn insbesondere die gegebenen Ebenenbüschel A, $A_1$ gleich

sind, so fallen, wie leicht zu sehen, die zwei Strahlen $_1A$, $^1A$ in einen einzigen zusammen, welcher zu der Ebene des Strahlbüschels $B_1$ senkrecht ist, so dafs alsdann die Axen $A$, $A_1$ der Ebenenbüschel parallel werden, und wo alsdann letztere den sogenannten geraden Cylinder erzeugen.

$\beta$) Aus den obigen Sätzen (3 und 4, links) folgt zuförderst, dafs, um die gegebenen Strahlbüschel $B$, $B_1$ in die verlangte Lage zu bringen, von den Schenkeln ihrer entsprechenden rechten Winkel $(st)$, $(s_1 t_1)$ (§. 9, II.) zwei ungleichnamige, also entweder $s$ und $t_1$, oder $t$ und $s_1$, vereiniget werden müssen. Ist dieses geschehen, und zwar so, dafs zugleich die Mittelpunkte der Strahlbüschel zusammenfallen (in $D$), so ist sofort nur noch nöthig den letzteren solche Lage zu geben, d. h., ihre Ebenen so gegen einander zu neigen, dafs irgend ein Paar andere entsprechende Strahlen derselben, etwa $a$ und $a_1$, zu einander rechtwinklig sind, denn alsdann sind drei Paar entsprechende Strahlen $s$ und $s_1$, $t$ und $t_1$, $a$ und $a_1$ zu einander rechtwinklig, und folglich die Aufgabe gelöst (11.). Allein bei genauer Untersuchung dieses Verfahrens gewahrt man bald, dafs von jenen ungleichnamigen Strahlenpaaren nicht jedes, sondern nur eins von beiden, vereiniget werden darf, und zwar verhält es sich damit wie folgt. Von den zwei Winkelsummen $(as) + (a_1 t_1)$ und $(at) + (a_1 s_1)$ ist nämlich, im Allgemeinen, die eine gröfser und die andere kleiner als ein rechter Winkel, weil beide Summen zusammen zwei rechte betragen, diejenige Summe nun, welche gröfser ist, enthält jedesmal die zwei Strahlen, welche allein vereiniget werden dürfen. Durch die wirkliche Auflösung wird diefs, wie folgt, klar dargethan. Es sei z. B. die Summe $(at) + (a_1 s_1) > R$, so lege man die Strahlbüschel so, dafs sowohl ihre Mittel-

punkte B, $B_1$, als die Strahlen t und $s_1$ vereiniget sind. Wird sodann die Lage des einen Strahlbüschels, etwa die des B, als fest angenommen, (Fig. 52.), so kann der andere $B_1$ seine Lage nur noch dadurch ändern, dafs er sich um den gemeinschaftlichen festen Strahl $ts_1$ herumbewegt, wobei der Strahl $a_1$ offenbar einen (geraden) Kegel zweiten Grades beschreibt; es soll aber diejenige Lage dieses Strahls gefunden werden, wo er zu seinem entsprechenden Strahle a rechtwinklig ist, für diesen Fall mufs er also auch in der Ebene E liegen, welche im Punkte B auf dem Strahle a senkrecht steht, und die also durch den zu a rechtwinkligen Strahl e geht, folglich können nur diejenigen zwei Strahlen $_1a$, $^1a$, in welchen diese Ebene E jenen Kegel schneidet, die gesuchte Lage des Strahles $a_1$ darstellen, wodurch fofort auch die Lage des Strahlbüschels $B_1$, in der dieser allein der Aufgabe genügt, bestimmt ist. Wie die Strahlen $_1a$, $^1a$ in der That zu konstruiren sind, ist nach diesen Angaben leicht zu sehen. Auch sieht man jetzt, warum die Auflösung unmöglich wird, wenn $(at) + (a_1 s_1) < R$ ist, weil nämlich alsdann Winkel $(a_1 s_1) < (et)$, so dafs folglich die Ebene E den durch $a_1$ beschriebenen Kegel nicht in zwei Strahlen schneiden kann. — Wenn insbesondere die Strahlbüschel B, $B_1$ gleich sind, so berührt die Ebene E den genannten Kegel, weil dann Winkel $(et) = (a_1 s_1)$, so dafs beide Strahlen $_1a$, $^1a$ mit e zusammenfallen, und so dafs alsdann auch die Ebenen der Strahlbüschel aufeinander fallen. In diesem Falle können aber die Strahlbüschel auch in solcher Lage der Aufgabe genügen, in der sie anfangs oben (I.) betrachtet worden, wo sie alsdann einen Kreis erzeugen. — Käme es darauf an, die Strahlbüschel so zu legen, dafs ihre entsprechenden Strahlen blofs der Richtung nach zu ein-

ander rechtwinklig wären, wenn z. B. ihre Mittelpunkte in fester Lage gegeben wären u. s. w., so dürfte man nur eben so verfahren, wie vorhin, und sodann den Strahlbüschel $B_1$ so legen, dafs er mit sich selbst parallel wäre und aufserdem jenen übrigen gegebenen Bedingungen genügte.

$\gamma$) Man beschreibe über irgend drei Projectionsstrahlen der gegebenen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, etwa über $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, als Durchmesser genommen, Kugelflächen, welche sich, im Allgemeinen, in irgend zwei Punkten $D$, $D_1$ schneiden werden, von denen offenbar jeder der Aufgabe genügt (11, b.). Schneiden sich die drei Kugelflächen nicht zusammen in zwei Punkten (oder berühren einander wenigstens in einem Punkt), so ist die Aufgabe für die gegebene Lage der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ unmöglich, sie kann aber, wofern eine Aenderung dieser Lage gestattet wird, leicht möglich gemacht werden.

Es ist hierbei noch zu bemerken, dafs jede der zwei obigen Auflösungen ($\alpha$.), ($\beta$.) auch auf die andere zurückgeführt werden kann (h.), und dafs ferner auch die ihnen entsprechenden sphärischen Aufgaben sich auf ähnliche Weise lösen lassen.

Durch die erste Auflösung ($\alpha$.) ist auch zugleich die folgende, zu (§. 30.) nachträgliche, Aufgabe gelöst:

15) „Zwei projectivische Gebilde $A_1$, $B_1$, nämlich einen Ebenenbüschel und einen ebenen Strahlbüschel, die in beliebig schiefer Lage gegeben sind, in perspectivische Lage zu bringen."

Wie die genannte Auflösung zeigt, kommen dieser Aufgabe, im Allgemeinen, zwei Auflösungen zu, d. h., wird die Lage des einen Gebildes als fest angenommen,

so kann das andere in zwei verschiedenen Lagen der Aufgabe genügen.

In Bezug auf die oben betrachteten besondern Erzeugnisse projectivischer Gebilde, deren entsprechende Elemente zu einander rechtwinklig sind, ist endlich noch zu bemerken, dafs sie bei gewissen Untersuchungen (im Raume und auf der Kugelfläche) ähnliche Hülfe leisten, wie man sie vom Kreise, vermöge seiner in (I.) angegebenen Eigenschaft, allgemein zu benutzen gewohnt ist, und was z. B. auch schon bei der vorstehenden Auflösung ($\beta$.) zu sehen ist. Defshalb mag in Hinsicht des besondern einfachen Hyperboloïds (1, 2.) und des besondern Kegels zweiten Grades (3, 4. rechts) hier noch insbesondere erinnert werden: „Dafs diese Figuren, vor den übrigen ihrer Art, daran zu erkennen sind, dafs jeder Kreisschnitt in ihnen zu einem ihrer Strahlen senkrecht ist, und dafs sie daher unter andern wie folgt, bestimmt und erzeugt werden (§. 51, IV, 9.):

16) „Das genannte besondere einfache Hyperboloïd wird bestimmt und erzeugt:

a) wenn irgend ein Kreis K und zwei ihn schneidende Gerade A, $A_1$, wovon die eine A senkrecht und die andere $A_1$ beliebig schief auf seiner Ebene steht, und welche Geraden sich nicht schneiden, gegeben sind; nämlich bewegt sich alsdann eine dritte Gerade a so, dafs sie stets die drei gegebenen festen Elemente K, A, $A_1$ schneidet, so beschreibt sie die genannte Fläche; oder:

b) wenn irgend zwei feste Gerade A, $A_1$, die nicht in einer Ebene liegen, gegeben sind, und ein veränderlicher Kreis K sich so

bewegt, dafs seine Ebene stets zu der einen Geraden A senkrecht ist, und dafs stets die Endpunkte eines Durchmessers desselben in den zwei festen Geraden liegen, so beschreibt er die genannte Fläche." Und:

17) „Wenn irgend ein Kreis K und irgend eine ihn schneidende und auf seiner Ebene senkrecht stehende Gerade A gegeben sind, so wird durch jeden Punkt D in der Geraden und durch den Kreis der genannte besondere Kegel erzeugt, d. h., so ist der Kegel, welcher durch den Kreis geht und jenen Punkt D zum Mittelpunkt hat, ein solcher besonderer Kegel."

III. An die vorstehende Reihe von Sätzen hätten fast unmittelbar noch mehrere andere Sätze angeschlossen werden können, wovon ich einige im Anhange aufstellen werde. Hier soll nur noch ein eigenthümlicher Fall (I.), der mit einer Einschränkung schon in der vorigen Betrachtung (II, h.) vorkam, Platz finden.

Fället man nämlich aus einem beliebigen Punkte D Lothe auf die Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ....., $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$,..... irgend zweier beliebig schief liegender projectivischer Ebenenbüschel A, $A_1$, so bilden dieselben zwei ebene Strahlbüschel B, $B_1$, welche beziehlich mit den Ebenenbüscheln A, $A_1$ (II, g.), und folglich auch unter sich, projectivisch sind, und welche somit, im Allgemeinen, einen Kegel zweiten Grades erzeugen, dessen Mittelpunkt D ist. Ferner folgt, dafs die Ebene irgend zweier entsprechender Strahlen (Lothe) der Strahlbüschel B, $B_1$, wie z. B. die Ebene ($aa_1$) der Strahlen a, $a_1$, zu der Durchschnittslinie $a_2$ der diesen Strahlen entsprechenden Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$ der Ebenenbüschel A, $A_1$ senkrecht ist.

Wird endlich noch erinnert, dafs die Ebenenbüschel $A$, $A_1$, da sie sich in schiefer Lage befinden, im Allgemeinen, entweder ein einfaches Hyperboloïd oder einen Kegel zweiten Grades erzeugen, so folgen also nachstehende Sätze:

1) „Alle Ebenen $[(aa_1)]$, welche durch einen beliebigen festen Punkt $D$ gehen, und wovon jede zu irgend einem Strahle $(a_2)$ eines einfachen Hyperboloïds $[AA_1]$ senkrecht ist, umhüllen irgend einen Kegel $D$ zweiten Grades."

2) „Fället man aus irgend einem Punkte $D$, (Durchschnitt der Axen $A$, $A_1$) Lothe auf die Berührungsebenen eines gegebenen Kegels $D$ zweiten Grades, so liegen sie in einer andern Kegelfläche $[AA_1]$ von demselben Grade"*).

2) „Leget man durch irgend einen Punkt $D$ Ebenen, welche auf den Strahlen eines gegebenen Kegels $[AA_1]$ zweiten Grades rechtwinklig stehen, so umhüllen und berühren sie irgend einen andern Kegel $D$ von demselben Grade"*).

## Zusammengesetztere Sätze und Aufgaben.

54. Die in den vorhergehenden Paragraphen (§. 50 — 53.) entwickelten Eigenschaften beliebig schief liegender projectivischer Gebilde und deren Erzeugnisse führen, durch Wiederholung und Verbindung, zu zusammengesetzteren Sätzen, und zwar sind sie sehr dazu geeignet, eine Menge von Aufgaben leicht zu lösen, viele Sätze einfach zu beweisen, den inneren Zusammenhang von Porismen klar darzustellen, so wie endlich auch die Abhängigkeit gewisser Systeme ungleichartiger Figuren von einander zu begründen, und die

*) Diesen Satz, nebst einigen mit ihm zusammenhängenden Eigenschaften, habe ich zuerst bei einer Gelegenheit im Journ. f. Mathem. Bd. II, Heft III. ausgesprochen.

Gesetze für die Uebertragung der Eigenschaften des einen Systems auf das andere nachzuweisen. Einige passende Beispiele werden hinreichend sein, um dieses alles ins Klare zu setzen. Ich mufs jedoch bemerken, dafs man hier auf ähnliche Weise, wie früher (§. 19 — 25.), (§. 41 — 43.) und (§. 46.), zu Werke gehen könnte, nämlich durch stufenweise Verbindung der Gebilde und mit genauer Oekonomie, alle verschiedenen Reihenfolgen von Sätzen und Aufgaben zu entwickeln. Mehrere hierhin gehörige Sätze und Aufgaben werde ich im Anhange, zur Selbstübung, aufstellen.

55. Zum Behufe einiger nachfolgender Sätze und Aufgaben, so wie zur Erleichterung für alle späteren ähnlichen Betrachtungen, sollen hier vorerst einige Erklärungen festgestellt werden, welche als Ergänzung oder als Erweiterung sich an die obigen Erklärungen (§. 19.) anschliefsen, und welche eigentlich schon früher (§. 32, oder §. 33.) ihre Stelle hätten finden können. Aehnlicherweise nämlich, wie in (§. 19.) die Figuren in der Ebene erklärt und in ihrer Vollständigkeit aufgefafst worden sind, sollen hier Figuren, im Allgemeinen, mögen sie in einer Ebene E, oder in einem Strahlbüschel D, oder im Raume überhaupt liegen, erklärt und aufgefafst werden, und zwar wie folgt.

Irgend n Ebenen, die als zusammengehörend ins Aug gefafst werden, sollen fortan „vollständiges n Flach" heifsen, nämlich die Ebenen sollen seine Flächen und die Geraden, in denen sie sich paarweise schneiden, sollen seine Kanten genannt werden; es hat also im Ganzen $\frac{1}{2}$ n (n-1) Kanten. Ferner sollen die n Ebenen, wenn sie in irgend einer bestimmten Aufeinan-

Irgend n Punkte, die als zusammengehörend ins Aug gefafst werden, sollen fortan „vollständiges n Eck" heifsen, nämlich die Punkte sollen seine Ecken und die Geraden, in denen sie paarweise liegen, sollen seine Seiten genannt werden; es hat also im Ganzen $\frac{1}{2}$ n (n-1) Seiten. Ferner sollen die n Punkte, wenn sie in irgend einer bestimmten Aufeinanderfolge aufgefafst wer-

derfolge aufgefafst werden, wobei nämlich die erste als auf die letzte (nte) folgend angesehen wird, „einfaches n Flach" heifsen, und zwar sollen nur allein die Geraden, in denen sich die unmittelbar aufeinander folgenden Ebenen schneiden, Kanten desselben genannt werden; das vollständige n Flach umfafst also 3. 4. 5 ..... n einfache n Flach (§. 25, Note). Endlich soll das vollständige n Flach, so wie jedes einfache n Flach, „im Strahlbüschel" oder „im Raume" heifsen, je nachdem seine n Flächen sämmtlich durch einen und denselben Punkt D gehen oder nicht. Wenn übrigens in der Folge die unvollständigen Benennungen: „n Flach," „n Flach im Raume" gebraucht werden, so soll darunter beziehlich: „einfaches n Flach im Strahlbüschel," „einfaches n Flach im Raume" verstanden werden.

den, wobei nämlich der erste als auf den letzten (nten) folgend angesehen wird, „einfaches n Eck" heifsen, und zwar sollen nur allein die Geraden, in denen die unmittelbar aufeinander folgenden Punkte paarweise liegen, Seiten desselben genannt werden; das vollständige n Eck umfafst also 3. 4. 5..... n einfache n Ecke (§. 25, Note). Endlich soll das vollständige n Eck, so wie jedes einfache n Eck „in der Ebene" oder „im Raume" heifsen, je nachdem seine n Ecken sämmtlich in einer und derselben Ebene E liegen oder nicht. Wenn übrigens in der Folge die unvollständigen Benennungen: „n Eck", „n Eck im Raume" gebraucht werden, so soll darunter beziehlich: „einfaches n Eck in der Ebene," „einfaches n Eck im Raume" verstanden werden.

Auch ist zu bemerken, dafs ein „einfaches n Flach im Raume" zugleich als „einfaches n Eck im Raume" oder als „einfaches n Kant oder n Seit im Raume" aufgefafst werden kann, so dafs also derselben Figur jeder von diesen vier Namen beigelegt werden kann, je nachdem es den Umständen angemessen ist; und zwar sind diese Namen einander dergestalt paarweise zugeordnet, dafs man z. B., wie oben geschehen, sagt: das einfache n Flach im Raume habe n Kanten, und das einfache n Eck im Raume habe n Seiten, und auch umgekehrt; d. h., es sind die Namen Fläche und Kante, so wie Ecke und Seite sich einander zugeordnet.

Ferner ist über n Seit und n Kant noch folgendes zu bemerken:

Irgend n Gerade in einer Ebene E zusammengefafst, heifsen „vollständiges n Seit in der Ebene" (§. 19.)

Irgend n Strahlen in einem Strahlbüschel D zusammengefafst, sollen „vollständiges n Kant im Strahlbüschel" heifsen.

Das vollständige n Kant steht also dem vollständigen n Flach im Strahlbüschel D ähnlicherweise entgegen, wie das vollständige n Eck dem vollständigen n Seit in der Ebene E (§. 19.); denn wird der Strahlbüschel D der Ebene E entgegengestellt, so entspricht das genannte n Kant dem n Eck und das n Flach dem n Seit (§. 33.).

Es giebt nur einfache n Seit und n Kant im Raume, aber keine vollständige, es sei denn, dafs man irgend n Gerade im Raume (wovon keine zwei in einer Ebene liegen) so nennen wolle; allein da zwischen solchen Geraden keine unmittelbare Verbindung statt findet, so möchte diese Benennung unpassend sein.

56. Zu den obenerwähnten Beispielen (§. 54.) gehören nun zunächst die folgenden ausgedehnten Sätze (Porismen) und Aufgaben.

1) „Wenn im Raume irgend eine Anzahl n beliebige Gerade $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$, und desgleichen eine andere, um eins geringere, Anzahl n-1 beliebige Gerade $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$, gegeben sind, wovon weder bei jenen, noch bei diesen, keine zwei in einer Ebene liegen, und wenn n Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, die der Reihe nach durch

1) „Wenn im Raume irgend eine Anzahl n beliebige Gerade $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$, und desgleichen eine andere, um eins geringere, Anzahl n-1 beliebige Gerade $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$, gegeben sind, wovon weder bei jenen, noch bei diesen, keine zwei in einer Ebene liegen, und wenn n Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$, die der Reihe nach in jenen ersten n

jene ersten n Geraden gehen, sich so bewegen, dafs die Durchschnittslinien der nach der Reihe unmittelbar aufeinander folgenden Ebenenpaare, also die n-1 Durchschnittslinien $\alpha\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, ....., $\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}$, nach der Ordnung beziehlich jene andern n-1 festen Geraden schneiden, so beschreibt nicht allein jede dieser Durchschnittslinien, sondern so beschreibt jede der $\frac{1}{2}n$ (n-1) Durchschnittslinien, in welchen die n Ebenen im Ganzen einander paarweise schneiden, ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch die zwei festen Geraden liegen, um die sich die jedesmaligen zwei Ebenen drehen."

Geraden liegen, sich so bewegen, dafs die Geraden, welche durch die unmittelbar aufeinander folgenden Punktenpaare gehen, also die n-1 Geraden $aa_1$, $a_1a_2$, $a_2a_3$, ......, $a_{n-2}a_{n-1}$, nach der Ordnung beziehlich jene n-1 andern festen Geraden schneiden, so beschreibt nicht allein jede dieser schneidenden Geraden, sondern so beschreibt jede der $\frac{1}{2}n$(n-1) Geraden, in welchen die n Punkte paarweise genommen, liegen, ein einfaches Hyperboloïd, welches auch durch diejenigen zwei festen Geraden geht, in welchen sich die jedesmaligen zwei Punkte bewegen."

Die Richtigkeit dieser Sätze folgt ohne Schwierigkeit aus den obigen Fundamentalsätzen (§. 51, IV.). Auch ist leicht zu sehen, dafs und wie diese Sätze, in gewissem Sinne, die früheren Sätze (§. 47, I. und II.) als besondere Fälle umfassen, und dafs ihr Beweis dem der letztern ähnlich ist. Aufserdem umfassen sie sehr viele andere besondere Fälle, als z. B. die nachstehenden.

2) „Wenn im Raume ein beliebiges nKant $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$..... $\mathfrak{A}_{n-1}$ und irgend n-1 Kegelflächen 2ten Grades [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$], [$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$], ..... [$\mathfrak{A}_{n-2}\mathfrak{A}_{n-1}$], welche nach der Reihe den n-1 ersten Kantenwinkel ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$), ($\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$), ..... ($\mathfrak{A}_{n-2}\mathfrak{A}_{n-1}$) des n

2) „Wenn im Raume ein beliebiges nSeit $AA_1A_2$..... $A_{n-1}$ und irgend n-1 Kegelschnitte [$AA_1$], [$A_1A_2$], ..... [$A_{n-2}A_{n-1}$], welche nach der Reihe den n-1 ersten Winkeln ($AA_1$), ($A_1A_2$), ..... ($A_{n-2}A_{n-1}$) des n Seits einge-

Kants umschrieben sind*), gegeben sind, und wenn ein veränderliches einfaches n Flach $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$, sich so bewegt, dafs seine Flächen $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$, nach der Reihe sich um die Kanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_{n-1}$ jenes n Kants drehen, während seine n-1 ersten Kanten $\alpha\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}$, nach der Ordnung, sich als Strahlen in jenen Kegelflächen bewegen: so bewegt sich auch seine nte Kante $\alpha_{n-1}\alpha$ in einer bestimmten nten Kegelfläche 2ten Grades [$\mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{A}$], welche dem nten Kanten-Winkel ($\mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{A}$) des gegebenen n Kants umschrieben ist, und so beschreibt jede der übrigen $\frac{1}{2}$ n (n-3) Kanten des durch das genannte einfache n Flach $\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ bestimmten vollständigen n Flachs ein einfaches Hyperboloïd, welches durch diejenigen zwei Kanten des gegebenen n Kants geht, um welche sich die zwei Flächen, denen die jedesmalige beschreibende Kante angehört, drehen."

3) „Wenn im Raume ein beliebiges n Kant $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{n-1}$ und irgend n-1 Ebenen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \ldots \mathfrak{B}_{n-2}$, welche durch die n-1 ersten Ecken $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-2}\mathfrak{A}_{n-1}$ des

schrieben sind*), gegeben sind, und wenn ein veränderliches einfaches n Eck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ sich so bewegt, dafs seine Ecken $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$, nach der Reihe, die Seiten $A, A_1, \ldots A_{n-1}$ jenes nSeits durchlaufen, während seine n-1 ersten Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n-2}\mathfrak{a}_{n-1}$, nach der Ordnung, sich als Tangenten um jene Kegelschnitte herumbewegen: so bewegt sich auch seine nte Seite $\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{a}$ als Tangente um einen bestimmten nten Kegelschnitt [$A_{n-1}A$], welcher dem nten Winkel ($A_{n-1}A$) des gegebenen n Seits eingeschrieben ist, und so beschreibt jede der $\frac{1}{2}$ n (n-3) übrigen Seiten des vollständigen n Ecks, welches durch das genannte einfache n Eck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ bestimmt wird, ein einfaches Hyperboloïd, in welchem auch diejenigen zwei Seiten des gegebenen n Seits liegen, längs denen sich die zwei Ecken, welche die jedesmalige beschreibende Seite bestimmen, bewegen."

3) „Wenn im Raume ein beliebiges n Seit $AA_1 \ldots A_{n-1}$ und irgend n-1 Punkte $B, B_1, \ldots B_{n-2}$, welche in den n-1 ersten Flächen (Winkel-Ebenen) $AA_1$, $A_1A_2$, ....

*) d. h. die Kegelfläche geht durch die jedesmaligen zwei Kanten und ihr Mittelpunkt liegt also in ihrem Durchschnittspunkt.

*) d. h. der Kegelschnitt berührt die zwei Schenkel des Winkels und liegt also mit ihnen in einer und derselben Ebene.

n Kants gehen, gegeben sind, und wenn ein veränderliches einfaches n Flach $\alpha\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ sich so bewegt, dafs seine Flächen, nach der Reihe, sich um die Kanten jenes n Kants drehen, während seine n-1 ersten Kanten, nach der Ordnung, sich in jenen festen Ebenen bewegen: so beschreibt seine letzte Kante eine bestimmte Kegelfläche zweiten Grades, welche dem letzten Winkel des gegebenen n Kants umschrieben ist, und so beschreibt jede der übrigen $\frac{1}{2}n(n-3)$ Kanten des durch das genannte einfache n Flach bestimmten vollständigen n Flachs $\alpha\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ ein einfaches Hyperboloïd, welches durch diejenigen zwei Kanten des gegebenen n Kants geht, längs denen sich die jedesmalige beschreibende Kante bewegt."

$A_{n-2}A_{n-1}$ des n Seits liegen, gegeben sind, und wenn ein veränderliches einfaches n Eck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ sich so bewegt, dafs seine Ecken, nach der Reihe, die Seiten jenes n Seits durchlaufen, während seine n-1 ersten Seiten, nach der Ordnung, sich um jene festen Punkte drehen: so bewegt sich seine letzte Seite als Tangente um einen bestimmten Kegelschnitt, welcher dem letzten Winkel des gegebenen n Seits eingeschrieben ist, und so beschreibt jede der übrigen $\frac{1}{2}n(n-3)$ Seiten des durch das genannte einfache n Eck bestimmten vollständigen n Ecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ ein einfaches Hyperboloïd, welches durch diejenigen zwei Seiten des gegebenen n Seits geht, längs denen sich die jedesmalige beschreibende Seite bewegt."

4) „Wenn im Raume irgend eine Anzahl n beliebige Gerade $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$, und eine gleiche Anzahl andere beliebige Gerade $A, A_1, \ldots\ldots, A_{n-1}$, wovon weder von diesen noch von jenen, keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so soll ein n Flach (im Raume) so beschrieben werden, dafs seine Ebenen der Reihe nach durch die ersten n Geraden gehen, und seine Kanten der Ordnung nach die letzten n Geraden schneiden."

4) „Wenn im Raume irgend eine Anzahl n beliebige Gerade $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$, und eine gleiche Anzahl andere beliebige Gerade $A, A_1, \ldots\ldots, A_{n-1}$, wovon weder von diesen noch von jenen, keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so soll ein n Eck (im Raume) so beschrieben werden, dafs seine Ecken der Reihe nach in den ersten n Geraden liegen, und seine Seiten der Ordnung nach die andern n Geraden schneiden."

Aehn-

Aehnlicherweise, wie die obigen Sätze (1.) andere Sätze, umfassen auch die vorliegenden Aufgaben (4.), in gewisser Hinsicht, die früheren Aufgaben (§. 25. u. §. 47, III.) als besondere Fälle in sich, und ihre Lösung ergiebt sich aus denselben projectivischen Eigenschaften, auf welchen die Lösung der letzteren beruht. Nämlich man nimmt, um z. B. die Aufgabe (4, rechts) zu lösen, in der ersten Geraden $\mathfrak{A}$ irgend einen Punkt $\mathfrak{a}$ an, legt durch diesen einen Strahl a, welcher die zwei Geraden A, $\mathfrak{A}_1$ schneidet (§. 51, II.), so erhält man in der letzteren einen bestimmten Punkt $\mathfrak{a}_1$ (den Durchschnittspunkt), durch diesen wird weiter ein Strahl $a_1$ gelegt, welcher die zwei folgenden Geraden $A_1$, $\mathfrak{A}_2$ schneidet, wodurch man in der letzteren $\mathfrak{A}_2$ einen Punkt $\mathfrak{a}_2$ findet, und so fährt man fort, bis man endlich durch einen bestimmten Punkt $\mathfrak{a}_{n-1}$, in der Geraden $\mathfrak{A}_{n-1}$, einen Strahl $a_{n-1}$ legt, welcher die zwei Geraden $A_{n-1}$, $\mathfrak{A}$ schneidet, wodurch man in der letzteren $\mathfrak{A}$ einen zweiten Punkt erhält, welcher $\mathfrak{a}_n$ heifsen und als schiefe (oder gebrochene) Projection des ersten $\mathfrak{a}$ angesehen werden mag. Eben so sucht man zu irgend zwei andern beliebigen Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Geraden $\mathfrak{A}$ zwei ihnen entsprechende Punkte $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ in derselben, sieht sodann die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ als entsprechende Punkte zweier aufeinander liegender projectivischer Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_n$ an, und sucht (§. 17.) die vereinigten entsprechenden Punktenpaare der letzteren, wodurch sofort die vorgelegte Aufgabe als gelöst zu betrachten ist. Die andere Aufgabe (links) ist dadurch offenbar zugleich gelöst. Wenn die Rangordnung der gegebenen Geraden, jede Abtheilung für sich genommen, nach Belieben gewählt werden darf, so ist die Zahl der Auflösungen, welche jede der vorgelegten Aufgaben im All-

gemeinen zuläſst, offenbar dieselbe, wie bei der obigen Aufgabe (§. 25, Note.).

Den obigen Sätzen (2.) und (3.) entsprechen nachstehende Aufgaben.

5) „Wenn im Raume ein beliebiges nKant und irgend nKegelflächen 2ten Gr., welche den nWinkeln desselben umschrieben sind, gegeben sind, so soll ein nFlach so beschrieben werden, daſs seine Flächen nach der Reihe durch die Kanten jenes nKants gehen, und seine Kanten, nach der Ordnung, in jenen Kegelflächen liegen."

6) „Wenn im Raume ein beliebiges nKant und irgend n Ebenen, welche nach der Reihe durch seine n Ecken gehen, gegeben sind, so soll ein nFlach so beschrieben werden, daſs seine Flächen, nach der Reihe, durch die Kanten jenes nKants gehen, und seine Kanten, nach der Ordnung, in jenen Ebenen liegen."

5) „Wenn im Raume ein beliebiges nSeit und irgend n Kegelschnitte, welche den Winkeln desselben eingeschrieben sind, gegeben sind, so soll ein nEck so beschrieben werden, daſs seine Ecken nach der Reihe in den Seiten jenes nSeits liegen, und seine Seiten, nach der Ordnung, jene Kegelschnitte berühren."

6) „Wenn im Raume ein beliebiges nSeit und irgend n Punkte, welche nach der Reihe in seinen Winkel-Ebenen liegen, gegeben sind, so soll ein nEck so beschrieben werden, daſs seine Ecken, nach der Reihe, in den Seiten jenes nSeits liegen, und seine Seiten, nach der Ordnung, durch jene Punkte gehen."

Die Lösung dieser Aufgaben (5 und 6.) beruht auf denselben Eigenschaften, wie die der obigen Aufgabe (4.), von welcher sie, in gewissem Sinne, besondere Fälle sind. Die zwei letzten Aufgaben (6.) sind, im Grunde genommen, eine und dieselbe, auch wurde die eine davon schon früher (§. 32, Ende.) mit andern Worten ausgesprochen.

57. Ein sehr specieller Fall der vorhergehenden Hauptaufgabe (§. 56, 4.) ist in neuerer Zeit in einigen mathematischen Zeitschriften unter verschiedenen Gesichtspunkten aufgefaſst und gelöst worden; dieser Fall

kann hier, unter allen seinen verschiedenen Aussagen, nebst einigen Folgerungen, mittelst projectivischer Eigenschaften, auffallend leicht gelöst und klar dargestellt werden. Die erste Aussage dieses Falles, wenn man ihn nämlich aus der obigen Aufgabe ableitet, und zwar dadurch, dafs daselbst die Zahl der gegebenen festen Geraden bei jeder Abtheilung auf **nur zwei** beschränkt wird, lautet wie folgt:

1) „In irgend vier gegebenen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $A$, $A_1$, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, vier Punkte zu finden, in jeder einen, welche in einer Geraden liegen."

1) „Durch irgend vier gegebene Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $A$, $A_1$, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, vier Ebenen zu legen, durch jede eine, welche sich in einer Geraden schneiden."

Oder diese beiden Aufgaben lassen sich in folgende bekannte Aufgabe zusammenfassen:

2) „**Diejenigen Geraden zu finden, welche irgend vier gegebene Gerade $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, schneiden.**"

**Auflösung.** Die obige Auflösung (§. 56, 4.) vereinfacht sich für den gegenwärtigen Fall wie folgt. Durch eine der gegebenen vier Geraden, etwa durch $A$, lege man irgend drei Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, welche die drei übrigen Geraden $A_1$, $A_2$, $A_3$ beziehlich in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ schneiden, wobei das Bild (Fig. 53.) der Vorstellung behülflich sein mag, ziehe sodann die Strahlenpaare $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$, welche der Geraden $A$ in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_4$ begegnen, sehe diese als entsprechende Punktenpaare zweier aufeinander liegender projectivischer Geraden $A$ und $A_4$ an, und suche sofort deren vereinigte entsprechende Punkte (§. 17.), so kann endlich durch jeden dieser Punkte (und

nur durch diese) eine Gerade gelegt werden, die der Aufgabe genügt, nämlich die Gerade, welche alsdann durch den einen oder andern dieser Punkte so gelegt wird, dafs sie irgend zwei der drei Geraden $A_1$, $A_2$, $A_3$ schneidet, trifft auch die jedesmalige dritte, und schneidet somit alle vier gegebenen Geraden. Es giebt demnach im Allgemeinen zwei Gerade, die der Aufgabe genügen; es kann aber auch nur eine, oder gar keine geben (§. 16, II.).

Die Richtigkeit dieser Auflösung fällt in die Augen. Nämlich vermöge der Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_2$, ....., welche durch die Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... des Ebenenbüschels A bestimmt werden, und welche die drei Geraden A, $A_1$, $A_2$ schneiden, sind die Geraden A und $A_2$ in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..... und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, ..... projectivisch, und aus gleichen Gründen sind die Geraden $A_2$ und $A_4$ in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, ..... und $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_4$, ..... projectivisch, folglich sind auch die Geraden A und $A_4$ in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..... und $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_4$, ..... projectivisch, und es müssen bei ihren vereinigten entsprechenden Punkten nothwendigerweise auch die zugehörigen Strahlen aufeinander fallen, die sodann jene Geraden sind, welche der Aufgabe genügen.

Die vorstehende Aufgabe (2.) wurde von Gergonne im XVII. Bd. S. 83. seiner *Annales de mathematiques* zur Lösung aufgestellt, und zwar mit der Forderung, dafs die gesuchten Geraden in aller Strenge konstruirt werden sollen (construire rigoureusement la droite qui etc.), weil er vermuthlich die Konstructionen bei den damals bekannten Auflösungen, welche mittelst Coordinaten oder durch Projection (Géométrie descriptive) ausgeführt waren, ungenügend fand. Ich habe darauf im Bd. II. S. 268. des Journal für

Mathematik eine Auflösung dieser Aufgabe bekannt gemacht, und fast gleichzeitig erschien auch in den genannten Annales Bd. XVIII. S. 182. eine Auflösung derselben von Bobillier und Garbinsky. Diese zwei Auflösungen stimmen jedoch in Einigem mit denen überein, welche Petit und Brianchon schon früher (im Bd. I. S. 434. der *Corresp. sur l'Ecole Polyt.*) gegeben hatten, die mir aber erst später zu Gesichte kamen. Im erwähnten Journal Bd. V. S. 174. erschien ferner eine dritte Auflösung, die indessen vor den früheren wenig Vorzüge zu haben scheint, nur dafs sie durch Hülfe der Coordinaten geführt ist. Die vorstehende Auflösung ist unstreitig unter allen hier genannten bei weitem die einfachste und bequemste, und dürfte als solche wohl der Gergonne'schen Forderung Genüge leisten.

Eine andere Aussage der obigen Aufgabe, unter welcher sie von Brianchon und Petit a. a. O. gelöst worden, ist folgende:

3) „Die gegenseitigen Durchschnittspunkte eines gegebenen einfachen Hyperboloïds und einer gegebenen Geraden zu finden."

Werden irgend drei Gerade des Hyperboloïds, die zu einer Schaar gehören, als die vorgenannten (2.) drei Geraden $A_1$, $A_2$, $A_3$, und wird die gegebene Gerade, als die vorige Gerade A angesehen, so sind alsdann die vereinigten entsprechenden Punkte der Geraden A, $A_4$ die hier zu findenden Durchschnittspunkte.

Dieselbe Aufgabe kann ferner auch in nachstehende Aussage eingekleidet werden:

4) „Wenn irgend zwei einfache Hyperboloïde H, $H_1$ und irgend zwei Gerade $A_2$, $A_3$, die in beiden Hyperboloïden, aber nicht in einer Ebene liegen, gegeben sind, so sollen die übri-

gen Geraden gefunden werden, welche die Hyperboloïde gemein haben."

Da die zwei gegebenen Geraden $A_2$, $A_3$ nicht in einer Ebene liegen, so gehören sie in jedem Hyperboloïd zu einer Schaar Gerader (§. 51, IV.); wird aus jeder dieser zwei Schaaren irgend eine dritte Gerade angenommen, und werden diese zwei neuen Geraden als die obigen (2.) Geraden A, $A_1$ angesehen, so werden offenbar diejenigen Geraden, welche die vier Geraden A, $A_1$, $A_2$, $A_3$ schneiden, der gegenwärtigen Aufgabe genügen, so dafs also die Hyperboloïde, aufser den gegebenen Geraden $A_2$, $A_3$, im Allgemeinen noch zwei andere Gerade, etwa e, k (§. 17.), gemein haben, welche die ersten zwei schneiden, und also nicht mit ihnen aus einer Schaar sind. Dafs die Hyperboloïde H, $H_1$ nicht mehr als zwei Gerade von jeder Schaar gemein haben können, ist einleuchtend, weil jedes von ihnen durch drei zu einer Schaar gehörige Gerade bestimmt wird (§. 51, IV.). Hierdurch ist also zugleich der nachstehende Satz erwiesen.

5) „Wenn zwei einfache Hyperboloïde irgend zwei Gerade $A_2$, $A_3$, die nicht in einer Ebene liegen, gemein haben, so schneiden sie einander aufserdem im Allgemeinen in noch zwei andern Geraden e, k, welche mit jenen zweien, in Bezug auf jedes Hyperboloïd, nicht aus einer Schaar sind; oder sie können aber auch einander aufserdem entweder $\alpha$) in (längs) einer andern Geraden (ek), die mit jenen zweien nicht aus einer Schaar ist, berühren, oder $\beta$) gar nicht treffen (2, Aufl.)."

Im letzten Falle ($\beta$) kann man sagen, die Hyperboloïde schneiden einander aufserdem in zwei imaginä-

ren Geraden. Der zweite Fall ($\alpha$) giebt durch Umkehrung den folgenden besondern Satz.

6) „Wenn zwei einfache Hyperboloïde einander in einer Geraden (ek) berühren, so schneiden sie einander nebstdem im Allgemeinen in zwei Geraden $A_2$, $A_3$, welche in jedem Hyperboloïd zu einer Schaar gehören; oder sie können sich auch in einer zweiten Geraden ($A_2A_3$), die mit jener (ek) in jedem Hyperboloïd nicht zu einer Schaar gehört, berühren, oder sich gar nicht weiter begegnen."

58. Der erfinderische Moebius hat zuerst den Satz bekannt gemacht und bewiesen *):

„Dafs es nämlich solche Paare (irreguläre) Tetraëder geben könne, wovon jedes dem andern (um- oder) eingeschrieben ist, d. h., wovon die Ecken eines jeden in den Flächen des andern, oder in deren Ebenen, liegen."

Die vorhergehenden Untersuchungen gewähren nicht nur eine anschauliche leichte Darstellung der Richtigkeit dieses Satzes, sondern sie gestatten auch eine deutliche Einsicht in den Spielraum seiner Möglichkeit unter gewissen gegebenen Bedingungen. Zu diesem Endzweck möge folgende Aufgabe aufgestellt und über ihre Lösung einige Andeutungen hinzugefügt werden.

„Wenn ein beliebiges Tetraëder T gegeben ist, ein anderes $\tau$ zu beschreiben, dessen Ecken in den Flächen des ersten, oder in deren Ebenen, liegen, und dessen Flächen, oder deren Ebenen, durch die Ecken des ersten gehen,

---

*) Im Journal für Mathematik Bd. III. S. 273.

und zwar wenn zwei Ecken des zweiten Tetraëders $\tau$ gegeben sind."

Ueber diese Aufgabe kann zuvörderst folgendes bemerkt werden.

Es seien A, B, C, D die Ecken des ersten Tetraëders T, und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die des zweiten $\tau$. Man nehme an, die Ecken des zweiten sollen nach folgender Ordnung in den Flächen des ersten, oder in deren Ebenen, liegen:

I. $\alpha BCD$, $\beta ACD$, $\gamma ABD$, $\delta ABC$,

wo z. B. $\alpha BCD$ heifst: die Ecke $\alpha$ liege in der Ebene der Fläche BCD. Nach dieser Annahme bleibt nun noch die Rangordnung frei, nach welcher die Flächenebenen des zweiten Tetraëders $\tau$ durch die Ecken des ersten T gehen sollen; diese gestattet, nach der blofsen Combination der Buchstaben, 24 verschiedene Fälle (§. 25, Note.). Diese 24 Fälle sind in Hinsicht der Zahl der Auflösungen, die sie zulassen, wesentlich von einander unterschieden, und zerfallen in dieser Beziehung in drei Abtheilungen, wovon z. B. zur ersten Abtheilung folgende vier Fälle gehören:

$$\text{II.}\begin{cases}1.\ A\beta\gamma\delta,\ B\alpha\gamma\delta,\ C\alpha\beta\delta,\ D\alpha\beta\gamma\ldots\ldots(a)\\ \left.\begin{array}{l}2.\ A\alpha\beta\gamma,\ B\alpha\beta\delta,\ C\alpha\gamma\delta,\ D\beta\gamma\delta\\ 3.\ A\alpha\beta\delta,\ B\alpha\beta\gamma,\ C\beta\gamma\delta,\ D\alpha\gamma\delta\\ 4.\ A\alpha\gamma\delta,\ B\beta\gamma\delta,\ C\alpha\beta\gamma,\ D\alpha\beta\delta\end{array}\right\}\ldots\ldots(b)\end{cases}$$

welche, wie durch die Unterabtheilungen (a), (b) angedeutet wird, im Wesentlichen nur zweierlei Art sind. In jedem dieser vier Fälle kommen der vorgelegten Aufgabe unendlich viele Auflösungen zu, (dagegen scheint bei den übrigen Fällen theils nur eine einzige, theils gar keine Auflösung möglich zu sein).

Als Beispiel soll nun der vorstehende Fall (1.) hier näher betrachtet werden.

Es sei ABCD (Fig. 54.) das gegebene Tetraëder T,

und etwa $\alpha$, $\gamma$ die zwei gegebenen Ecken des zweiten, zu beschreibenden, Tetraëders $\tau$. Da durch die drei gegebenen Punkte B, $\alpha$, $\gamma$ die Ebene $B\alpha\gamma\delta$ bestimmt ist, in welcher die Ecke $\delta$ liegt (II, 1.), und da letztere auch in der Flächenebene ABC liegen mufs (I.), so ist folglich ihr Ort auf die Durchschnittslinie B𝔟 dieser zwei Ebenen beschränkt. Ebenso mufs die andere, zu suchende Ecke $\beta$ einerseits in der Ebene $D\alpha\gamma$ und andererseits in der Ebene ACD liegen, so dafs folglich ihr Ort auf die Durchschnittslinie D𝔡 dieser zwei Ebenen beschränkt ist. Da nun ferner von den zu findenden zwei Flächenebenen $A\beta\gamma\delta$, $C\alpha\beta\delta$ (II, 1.) jede durch die zwei Ecken $\beta$, $\delta$ geht, so dafs die Kante $\beta\delta$ in ihrer Durchschnittslinie liegt, so kommt es folglich nur darauf an, durch die zwei gegebenen Geraden $A\gamma$, $C\alpha$ zwei Ebenen so zu legen, dafs ihre Durchschnittslinie die zwei gegebenen Geraden B𝔟, D𝔡 schneidet, oder, was eben so viel ist, eine Gerade zu finden, welche die vier Geraden $A\gamma$𝔞, B𝔟, $C\alpha$𝔠, D𝔡 schneidet. Wird aber bemerkt, dafs diese vier Geraden bereits von den drei Geraden AC, BD, $\alpha\gamma$ geschnitten werden, so folgt, dafs es von einer unzähligen Schaar Gerader geschehen kann, zu welchen diese drei gehören (§. 51.), und zwar folgt, dafs jede Gerade, welche irgend drei derselben schneidet, auch jedesmal der vierten begegnet. Daher sind auch unzählige Tetraëder $\tau$ möglich, welche der vorgelegten Aufgabe genügen, und zwar dergestalt, dafs z. B. jeder Punkt in der Geraden B𝔟 als die zu suchende Ecke $\delta$ angenommen werden kann, wodurch sodann die andere Ecke $\beta$ bestimmt und nach (§. 51, II.) leicht zu finden ist (und zwar bei der hier zu Grunde gelegten Figur „blofs durch Ziehen dreier Gerader zwischen gegebenen Punkten" gefunden wird). Oder es folgt daher, dafs der

Kante $\beta\delta$ des zu beschreibenden Tetraëders, für alle ihre verschiedenen Lagen, in welchen sie der Aufgabe genügen kann, ein Spielraum frei steht, in welchem sie ein einfaches Hyperboloïd beschreibt (§. 51, IV.), und dafs dabei die zwei Ecken $\beta$, $\delta$ die ihnen zukommenden Ortslinien Dd, Bb projectivisch theilen.

Aus dieser Auflösung ergiebt sich somit zugleich der folgende Satz.

„Wenn ein beliebiges Tetraëder T und irgend zwei Punkte $\alpha, \gamma$, welche in zwei Flächenebenen desselben liegen, gegeben sind, so giebt es unzählige andere Tetraëder $\tau$, welche jenem nach der obigen Art (II, 1.) zugleich um- und eingeschrieben sind, und wovon jedes jene zwei Punkte zu Eckpunkten hat; der Ort ihrer übrigen Eckpunkte $\beta$, $\delta$ ist auf zwei bestimmte Gerade Dd, Bb beschränkt, und zwar dergestalt, dafs diese Geraden in Ansehung der zusammengehörigen Eckpunktenpaare projectivisch sind, und dafs folglich der Ort der diese Eckpunkte verbindenden Kante $\beta\delta$ ein einfaches Hyperboloïd ist."

Es mag noch bemerkt werden, dafs bei den drei übrigen Fällen (II, b.) ähnliche Auflösungen statt finden, wie die vorstehende, und dafs aus ihnen gleiche Resultate folgen. *)

*) Es wäre wohl zu wünschen, dafs sich Jemand die Mühe gäbe, die obige Aufgabe vollständig zu erörtern, d. h. das Eigenthümliche aller möglichen Fälle derselben in's Klare brächte, und die dabei statt findenden Umstände erforschte. Die vorstehende Auflösung zeigt, wie diesem Gegenstande durch projectivische Eigenschaften beizukommen sei. Bei meiner flüchtigen Untersuchung fand ich unter andern noch: „Dafs wenn zwei Tetraëder T, $\tau$ nach einer der obigen drei Arten (II, b.) einander umschrieben sind, sie alsdann aufserdem solche gegen-

## Allgemeine Anmerkung.

### Ueber Abhängigkeit einiger Systeme verschiedenartiger Figuren von einander.

59. Das einfache Hyperboloïd giebt, vermöge der ihm zukommenden Eigenschaften und namentlich vermöge seiner doppelten Erzeugung durch projectivische Gebilde, ein Mittel an die Hand die gegenseitige Abhängigkeit gewisser Systeme verschiedenartiger Figuren von einander klar darzuthun, die Uebertragung der Eigenschaften jedes Systems auf alle übrigen leicht zu bewerkstelligen, und zugleich auch jedes System in jedes andere zu verwandeln. Dieser Gegenstand gehört eigentlich dem zweiten Abschnitte an, (weil dieser das Aufeinanderbeziehen der Ebenen und der Strahlbüschel enthalten wird), wo er (so wie im vierten und fünften Abschnitte) seine vollständige Erörterung finden wird; wegen seiner nahen Verwandtschaft mit dem eben

---

seitige Beziehung haben, dafs jedes Paar gegenüber liegender Kanten des einen Tetraëders mit einem bestimmten Paar gegenüber liegenden Kanten des andern in einem einfachen Hyperboloïd liegen;" u. s. w. Bei der Lösung der übrigen 20 Fälle der obigen Aufgabe (die aufser den 4 erwähnten (II.) anscheinend statt finden können) dürfte die frühere Aufgabe (§. 57, 2.) behülflich sein. Werden solche Auflösungen, wo das zu beschreibende Tetraëder $\tau$ in einen Grenzfall, d. i. in eine Gerade übergeht, mit gezählt, so möchten wohl bei jedem der 20 Fälle zwei Auflösungen statt finden; so vertrat z. B. beim oben betrachteten Falle (II, 1.) jede der drei Geraden $AC$, $BD$, $\alpha\gamma$ einen solchen Grenzfall.

Bei der obigen Aufgabe könnten ferner auch, anstatt der zwei Eckpunkte $\alpha$, $\gamma$, entweder zwei Flächenebenen, oder eine Flächenebene und eine Ecke des zu beschreibenden Tetraëders als gegeben angenommen werden. Uebrigens sind alle diese Aufgaben nur die einfachsten Fälle von andern, ausgedehnteren Aufgaben, die sich ähnlicherweise durch projectivische Eigenschaften lösen lassen, wie jene in (§. 56.).

Abgehandelten glaubte ich jedoch ihn schon hier kurz berühren zu müssen.

I. Bei den vorhergehenden Untersuchungen wurde eine Gerade 𝔄 im Raume auf doppelte Weise, d. h., in Hinsicht zweier Gebilde, betrachtet, nämlich entweder als eigentliche Gerade 𝔄 (d. i. als eine unendliche Menge Punkte enthaltend), oder als Ebenenbüschel 𝔄 (d. i. als Axe des Ebenenbüschels). In dieser doppelten Hinsicht steht daher eine Gerade 𝔄 mit allen Punkten und allen Ebenen im Raume in folgender Beziehung:

| Als Ebenenbüschel 𝔄 | Als Gerade 𝔄 |
|---|---|
| „Jeder Punkt liegt in irgend einer seiner Ebenen;" | „Jede Ebene geht durch irgend einen ihrer Punkte;" |

Oder:

| | |
|---|---|
| „Sie (die Axe 𝔄) bestimmt mit jedem Punkt (der nicht in ihr liegt), eine Ebene." | „Sie bestimmt mit jeder Ebene (in der sie nicht liegt), einen Punkt." |

Werden nach dieser zweifachen Hinsicht zwei Gerade 𝔄, $𝔄_1$ im Raume zugleich betrachtet, und zwar mit Beziehung aufeinander, so sind dabei folgende wesentliche Umstände zu bemerken:

| | |
|---|---|
| „Jede Ebene des einen Ebenenbüschels schneidet den andern Ebenenbüschel in einem ebenen Strahlbüschel; die gesammten Strahlen aller dieser Strahlbüschel, oder die gesammten Strahlen, in welchen die Ebenen beider Ebenenbüschel einander paarweise einschneiden, erfüllen einfach den ganzen Raum, d. h. durch jeden Punkt des Raums (der nicht in einer der zwei Axen liegt) geht | „Jeder Punkt der einen Geraden bestimmt mit den Punkten der andern Geraden einen ebenen Strahlbüschel; die gesammten Strahlen aller dieser Strahlbüschel, oder die gesammten Strahlen, welche die Punkte beider Geraden, paarweise genommen, mit einander bestimmen, erfüllen einfach den ganzen Raum, und zwar liegt in jeder Ebene (die durch keine der zwei Geraden geht) irgend |

irgend einer von diesen Strahlen, aber nur ein einziger; so dafs also jede beliebige Ebene sich mit irgend zwei Ebenen der zwei Ebenenbüschel in einem solchen Strahle schneidet." einer von diesen Strahlen, aber nur ein einziger; so dafs also jeder beliebige Punkt mit irgend zwei Punkten der zwei Geraden in einem solchen Strahle liegt."

Von diesen Strahlen, welche auf die eben angegebene Weise durch zwei Ebenenbüschel oder durch zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume bestimmt werden, weifs man nun aus früheren Untersuchungen (§. 51.), dafs jedesmal diejenige Schaar unter ihnen, die irgend einer beliebigen dritten Geraden A (oder $\mathfrak{A}_2$) begegnen, in einem einfachen Hyperboloïd liegen, und dafs einerseits die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in Ansehung der Ebenenpaare, welche diese Schaar Strahlen zu Durchschnittslinien haben, und andererseits die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von dieser Schaar Strahlen getroffen werden, projectivisch sind, u. s. w. Mit Rücksicht auf alle diese Umstände lassen sich nachstehende interessante Betrachtungen leicht bewerkstelligen.

II. Bringt man mit den zwei Doppelgebilden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ irgend zwei Ebenen E, $E_1$ in Verbindung, so können die letzteren, mittelst der durch die erstern bestimmten Strahlen (I.), auf eigenthümliche Weise aufeinander bezogen werden. Um bei dieser Untersuchung der Vorstellung zu Hülfe zu kommen, stelle etwa in (Fig. 55.) das Papier die Ebene E dar, wo nämlich alle nicht punktirten Linien in dieser Ebene liegen. Es sei die Gerade $ee_1$ die Durchschnittslinie der Ebenen E, $E_1$, und r und s, $z_1$ und $y_1$ seien die Punkte, in welchen die Geraden oder Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ von den Ebenen E, $E_1$ getroffen werden, so dafs also rs, $z_1y_1$ oder x, $t_1$ diejenigen zwei Strahlen des genannten,

durch die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ bestimmten Strahlsystems (I.) sind, welche in den Ebenen E, $E_1$ liegen. Ferner seien t, $x_1$ die Punkte, in welchen die Strahlen $t_1$, x den Ebenen E, $E_1$ begegnen, und welche mit den vorgenannten Punkten die Geraden tr, ts oder y, z; $x_1z_1$, $x_1y_1$, oder $s_1$, $r_1$ bestimmen. Hat man alle diese Elemente genau fixirt, so lassen sich weiter folgende Eigenschaften angeben.

1) Die zwei Ebenen E, $E_1$ werden mittelst des genannten Strahlsystems dergestalt aufeinander bezogen, dafs, im Allgemeinen, jedem Punkt der einen Ebene ein bestimmter Punkt in der andern Ebene entspricht, d. h., durch jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ in E geht ein einziger bestimmter Strahl a (der die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ schneidet, in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ und), der die $E_1$ in irgend einem bestimmten Punkte $\mathfrak{a}_1$ trifft, welcher der „entsprechende" jenes Punktes, oder dessen „schiefe Projection," heifsen soll. Von dieser bestimmten Beziehung machen nur folgende Punkte eine wesentliche Ausnahme.

Da nämlich allen Punkten r, s, $\mathfrak{x}$, ..... der Ebene E, welche in dem vorhin erwähnten Strahle x liegen, offenbar dieser Strahl gemeinschaftlich zugehört, so wird folglich der einzige Punkt $x_1$, in welchem derselbe die Ebene $E_1$ trifft, allen jenen Punkten zugleich entsprechen. Und da ferner alle Strahlen, welche von dem Punkte $y_1$, in $E_1$, ausgehen, in der Ebene $y_1\mathfrak{A}$ liegen und in dieser einen ebenen Strahlbüschel $y_1$ bilden (I.), so werden sie nothwendiger Weise die Ebene E längs der Geraden y, d. h. längs der Durchschnittslinie der Ebenen $y_1\mathfrak{A}$ und E, treffen, so dafs folglich allen Punkten r, t, $\mathfrak{y}$, ..... dieser Geraden y in E der einzige Punkt $y_1$ in $E_1$ entspricht. Eben so haben alle Punkte s, t, $\mathfrak{z}$, ..... der Geraden z in E, den Punkt

$z_1$ zu ihrem gemeinschaftlich entsprechenden Punkte in $E_1$. Aus gleichen Gründen entsprechen ähnlicherweise den sämmtlichen Punkten der drei Geraden $r_1$, $s_1$, $t_1$ in der Ebene $E_1$, die drei einzelnen Punkte r, s, t in der Ebene E. Diese besondere Eigenschaft der Punkte r, s, t und $z_1$, $y_1$, $x_1$ hat auf die nachfolgenden Resultate großsen Einfluſs, so daſs die meisten sich mehr oder weniger auf dieselben beziehen, daher mögen die Dreiecke rst, $z_1 y_1 x_1$ unter dem Namen „Hauptdreiecke" der Ebenen E, $E_1$ festgehalten werden. Die Hauptdreiecke haben nach den eben bemerkten Eigenschaften solche gegenseitige Beziehung, daſs die sämmtlichen Punkte der Seiten (x, y, z, oder $r_1$, $s_1$, $t_1$) eines jeden, den einzelnen Eckpunkten ($x_1$, $y_1$, $z_1$, oder r, s, t) des andern entsprechen.

Endlich mag auch noch bemerkt werden, daſs jeder Punkt in der Durchschnittslinie $ee_1$ der Ebenen E, $E_1$ sich selbst entspricht, oder mit seinem entsprechenden vereiniget ist, weil offenbar der einem solchen Punkte zugehörige Projectionsstrahl beide Ebenen in demselben zugleich trifft.

Wie zu irgend einem gegebenen Punkt in der einen Ebene, der entsprechende in der andern Ebene gefunden wird, ist leicht zu sehen, nämlich, wenn etwa a, in E, der gegebene Punkt ist, so wird der zugehörige Projectionsstrahl a offenbar dadurch gefunden, daſs man die Ebenen $a\mathfrak{A}$, $a\mathfrak{A}_1$ legt, deren Durchschnittslinie er sein muſs (I.), und sodann wird dieser Strahl a der Ebene $E_1$ in dem gesuchten entsprechenden Punkte $a_1$ begegnen. Der Punkt $a_1$ kann daher auch bloſs durch Ziehen zweier Paar Gerader in den Ebenen E, $E_1$ gefunden werden, denn zieht man aus dem gegebenen Punkt a durch den Punkt r die Gerade $arr$, welche die Durchschnittslinie $ee_1$ in dem Punkte $rr_1$ trifft, und

zieht sodann, in $E_1$, die Gerade $\mathfrak{z}_1\mathfrak{r}_1$, so mufs in dieser der gesuchte Punkt $\mathfrak{a}_1$ liegen; und da ähnlicherweise durch die Gerade $\mathfrak{a}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}$, in E, eine Gerade $y_1\,\mathfrak{s}_1$, in $E_1$, bestimmt wird, in welcher ebenfalls der Punkt $\mathfrak{a}_1$ liegen mufs, so ist folglich der letztere der Durchschnittspunkt der zwei Geraden $z_1\mathfrak{r}_1$, $y_1\mathfrak{s}_1$.

2) Es ist nun weiter anzugeben, welche Beziehung irgend zwei entsprechende Figuren in den Ebenen E, $E_1$ zu einander haben, und nach welchen Gesetzen ihre Eigenschaften von einander abhängen; und zwar entsteht zunächst die Frage, welche Figur einer Geraden, und sodann welche Figur irgend einer bestimmten krummen Linie entspreche? Die Antworten hierauf ergeben sich aus dem Vorhergehenden fast unmittelbar, nämlich wie folgt.

a) Einer beliebigen Geraden in einer der zwei Ebenen E, $E_1$, z. B. der Geraden A in E, entspricht offenbar in der andern Ebene $E_1$ irgend ein Kegelschnitt [$A_1$]; denn alle Projectionsstrahlen, welche jene Gerade treffen, oder ihre sämmtlichen Punkte auf die Ebene $E_1$ projiciren, liegen in einem einfachen Hyperboloïd (I.), welches die Ebene $E_1$ in dem genannten Kegelschnitte schneidet (§. 51, IV, 4.). Da die Gerade A die Seiten x, y, z des Hauptdreiecks in den Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ schneidet, so geht folglich, vermöge dieser Punkte, der Kegelschnitt [$A_1$] durch die drei Punkte $x_1$, $y_1$, $z_1$ (1.), so dafs er also dem Hauptdreieck $x_1y_1z_1$ umschrieben ist. Ferner geht der Kegelschnitt auch durch den nämlichen Punkt $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$, in welchem die Gerade A der Durchschnittslinie $e\,e_1$ begegnet (1.). Natürlicherweise mufs auch umgekehrt jedem beliebigen, dem Hauptdreieck $x_1y_1z_1$ umschriebenen Kegelschnitt [$A_1$], irgend eine Gerade A, in E, entsprechen; dieses folgt auch in der That daraus, dafs alle Projectionsstrahlen

strahlen eines solchen Kegelschnitts (d. h. alle Strahlen, die durch seine sämmtlichen Punkte gehen), zufolge (§. 51, IV, 9, a.), ebenfalls in einem einfachen Hyperboloïd liegen, und da dasselbe von der Ebene E offenbar in dem Strahle x (der dem Punkte $x_1$ zugehört) geschnitten wird, so mufs es von ihr noch in irgend einer andern Geraden A geschnitten werden (§. 51, IV, 3.), welche dem gegebenen Kegelschnitte [$A_1$] entspricht.

Es ist klar, dafs alles was hier von der Ebene $E_1$ gesagt worden, auch umgekehrt in entsprechendem Sinne von der Ebene E gilt.

In dem was über die Gerade A gesagt worden, findet nur dann eine wesentliche Ausnahme, oder ein besonderer Fall statt, wenn diese Gerade durch einen der drei Hauptpunkte r, s, t geht, nämlich alsdann entspricht ihr in der Ebene $E_1$ ebenfalls eine Gerade $A_1$, welche beziehlich durch einen der drei Punkte $z_1$, $y_1$, $x_1$ geht. Denn geht z. B. die Gerade A durch den Punkt r, wie etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{r}$, so liegen offenbar alle ihr (oder ihren sämmtlichen Punkten) zugehörigen Projectionsstrahlen in der Ebene A$\mathfrak{A}$ oder r$\mathfrak{A}$, und daher mufs ihr nothwendigerweise diejenige Gerade $A_1$ entsprechen, in welcher jene Ebene die Ebene $E_1$ schneidet, und welche also durch den Punkt $z_1$ geht (also die Gerade $\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}_1 z_1$); und zwar müssen die Geraden A, $A_1$ perspectivisch sein, und namentlich den Punkt, in welchem die Axe $\mathfrak{A}_1$ von jener Ebene A$\mathfrak{A}$ getroffen wird, zum Projectionspunkt haben (I.) und einander in der Durchschnittslinie $e e_1$ schneiden (im Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$). Aehnliches findet statt, wenn die Gerade A durch den Punkt s geht. Geht sie aber durch den Punkt t, so liegt sie zwar nicht mehr mit der Geraden $A_1$, die dann durch den Punkt $x_1$ geht, in einer Ebene, son-

dern in diesem Falle liegen sie in einem einfachen Hyperboloïd, welches die Ebene E in den Geraden A und x, und die Ebene $E_1$ in den Geraden $A_1$ und $z_1$ schneidet; denn da die Gerade A durch den Punkt t geht, so ist allemal $t_1$ ein Projectionsstrahl derselben, und dann mufs die Ebene $E_1$ das genannte Hyperboloïd noch in einer andern Geraden $A_1$ schneiden, welche nothwendigerweise durch den Punkt $x_1$ geht, weil x jedesmal Projectionsstrahl der Geraden A ist *).

Es giebt demnach in den zwei Ebenen E, $E_1$ drei Paar Strahlbüschel, nämlich r und $z_1$, s und $y_1$, t und $x_1$, deren Strahlen, als Gerade A und $A_1$ betrachtet, einander paarweise entsprechen, und welche, wie leicht zu sehen, in Ansehung dieser Strahlenpaare projectivisch sind, und zwar liegen sowohl r und $z_1$, als s und $y_1$ perspectivisch, weil sie die Durchschnitte der Ebenen E, $E_1$ und der Ebenenbüschel 𝔄, $𝔄_1$ sind, oder weil ihre entsprechenden Strahlen (wie $\mathfrak{r}\mathfrak{r}$, $z_1\mathfrak{r}_1$) sich in der Geraden $ee_1$ schneiden.

Demnach hat man fürs erste das folgende Gesetz.

„Den gesammten Geraden in einer der zwei Ebenen E, $E_1$, ausgenommen die Strahlen der drei Strahlbüschel (r, s, t oder $z_1$, $y_1$, $x_1$), deren Mittelpunkte die Spitzen des Hauptdreiecks sind, entsprechen in der andern Ebene die gesammten Kegelschnitte, welche dem Hauptdreieck umschrieben werden können, und auch umgekehrt." Und ferner: „Die Geraden, welche Strahlen der genannten Strahlbüschel sind,

*) Gehen die Geraden A, $A_1$ durch die Punkte r und $z_1$, oder s und $y_1$, so sind sie in zwei bestimmten Lagen projectivisch ähnlich, gehen sie aber durch die Punkte t und $x_1$, so findet dieses nur in einer Lage statt.

entsprechen einander paarweise, nämlich es entsprechen sich die Strahlen der Strahlbüschel r und $z_1$, s und $y_1$, t und $x_1$, und es sind diese Strahlbüschel, in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare, projectivisch, und zwar sind die zwei ersten Paar Strahlbüschel perspectivisch, so dafs jedes Paar die Durchschnittslinie $ee_1$ zum perspectivischen Durchschnitt hat, wogegen vom dritten Paar (t und $x_1$) zwei entsprechende Strahlen in dieser Linie vereinigt sind; auch sind ferner je zwei entsprechende Strahlen von r und $z_1$ oder s und $y_1$ perspectivisch, und ihr Projectionspunkt liegt in der Axe $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}$; dagegen erzeugen je zwei entsprechende Strahlen von t und $x_1$, ein einfaches Hyperboloïd, und diese Schaar Hyperboloïde haben die vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, x, $t_1$ gemein."

b) Ein eigenthümlicher Fall, der zwar, wie man sehen wird, schon in dem vorstehenden Gesetz mit inbegriffen ist, verdient, wegen seines Einflusses auf spätere Resultate, hier noch näher erörtert zu werden. Es kann nämlich gefragt werden, welches in jeder der zwei Ebenen E, $E_1$ der Ort derjenigen Punkte sei, deren entsprechende in der andern Ebene unendlich entfernt liegen? Diese Frage läfst sich folgendermafsen leicht beantworten.

Alle Projectionsstrahlen, welche nach den unendlich entfernten Punkten einer der zwei Ebenen, z. B. der Ebene E, gerichtet sind, sind nothwendigerweise mit ihr parallel, und liegen folglich in einem hyperbolischen Paraboloïd (§. 52, I, 2, e.), welches von der Ebene $E_1$ in einem Kegelschnitt, und zwar im Allgemeinen in einer Hyperbel, geschnitten wird. Dieser Kegelschnitt, der durch $[Q_1]$ bezeichnet werden mag, geht offenbar durch die drei Punkte $z_1$, $y_1$, $x_1$, weil

durch jeden dieser Punkte ein der Ebene E paralleler Projectionsstrahl geht (denn auch der Strahl x, welcher durch den Punkt $x_1$ geht, ist als dieser Ebene parallel anzusehen). Auch folgt, dafs eine Asymptote des Kegelschnitts $[Q_1]$, oder im Fall er eine Parabel ist, dafs seine Axe der Durchschnittslinie $ee_1$ parallel sei, weil nämlich E eine Asymptotenebene des Paraboloïds ist (§. 52.). (Aus gleichen Gründen folgt, dafs die andere Asymptote derjenigen Geraden parallel ist, in welcher die Ebene $E_1$ von derjenigen Ebene geschnitten wird, die durch 𝔄 oder $𝔄_1$ geht und mit $𝔄_1$ oder 𝔄 parallel ist).

Da nun aber jedem dem Hauptdreieck $z_1 y_1 x_1$, in $E_1$, umschriebenen Kegelschnitt, irgend eine Gerade in E entspricht (a.), so sind demnach alle unendlich entfernten Punkte der Ebene E, als in einer Geraden Q liegend anzusehen*), welcher nämlich jener Kegelschnitt $[Q_1]$ entspricht. Aehnlicherweise mufs den unendlich entfernten Punkten der Ebene $E_1$, oder ihrer unendlich entfernten Geraden, welche $R_1$ heifsen mag, ein bestimmter Kegelschnitt [R] in E entsprechen, welcher dem Hauptdreieck rst umschrieben ist, u. s. w. Wenn insbesondere einer der zwei Kegelschnitte [R], $[Q_1]$ eine Parabel ist, so ist es der andere ebenfalls, was leicht nachzuweisen ist; u. s. w.

Also folgt:

„Dafs den unendlich entfernten Punkten jeder der zwei Ebenen E, $E_1$ ein bestimmter Kegelschnitt $[Q_1]$ oder [R] in der andern Ebene entspricht, welcher dem Hauptdreieck um-

---

*) Dieses ist in der Perspectivlehre ein bekannter alter Satz; im zweiten Abschnitt wird er einfacher und klarer dargestellt werden.

schrieben ist, so dafs also jene Punkte als in einer Geraden Q oder $R_1$ liegend angesehen werden müssen; von jedem der zwei Kegelschnitte, die im Allgemeinen Hyperbeln sind*), ist eine Asymptote der Durchschnittslinie $ee_1$ parallel; ist einer derselben eine Parabel, so ist es auch der andere, und dann sind ihre Axen der Linie $ee_1$ parallel."

c) Ueber die vorstehenden Resultate (a, b.) sind noch folgende nähere Umstände anzugeben. Wenn nämlich der Geraden A, wie sie in (Fig. 55.) gezeichnet vorliegt, der Kegelschnitt [$A_1$] entspricht, so wird jedem Kegelschnitt der sie berührt, und zugleich dem Hauptdreieck rst umschrieben ist, z. B. dem Kegelschnitt der sie in $\mathfrak{a}$ berührt und der durch [T] bezeichnet werden mag, eine solche Gerade $T_1$, in $E_1$, entsprechen, welche den Kegelschnitt [$A_1$] in demjenigen Punkte $\mathfrak{a}_1$ berührt, der jenem erstgenannten Punkte $\mathfrak{a}$ entspricht; denn da A und [T] nur den einzigen Punkt $\mathfrak{a}$ gemein haben, und da jedem Punkt in E, im Allgemeinen, nur ein einziger Punkt in $E_1$ entspricht, so können folglich auch [$A_1$] und $T_1$ nicht mehr als ein Punkt gemein haben.

Da ferner die Strahlen r$\mathfrak{a}$ und $z_1\mathfrak{a}_1$ einander entsprechen, und zwar da den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{z}_1$ die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $z_1$ entsprechen, so sieht man, dafs wenn der Strahl r$\mathfrak{a}$ sich um r dreht, bis die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{z}_1$ mit $\mathfrak{z}$ zusammenfallen, dann der Punkt $\mathfrak{a}_1$ sich nach $z_1$ bewegen wird, bis er sich zuletzt mit ihm vereinigt, so dafs alsdann der Strahl $z_1\mathfrak{r}_1$ den Kegelschnitt [$A_1$] in $z_1$ berührt. Eben so wird die Tangente $y_1\mathfrak{b}_1$, welche

*) Die unendlich entfernten Punkte dieser Hyperbeln entsprechen einander.

den Kegelschnitt $[A_1]$ in $y_1$ berührt, durch den Strahl $s\mathfrak{y}\mathfrak{b}$ bestimmt und gefunden. Und ebenso ist die Tangente im Punkte $x_1$ derjenige Strahl, welcher dem Strahl $t\mathfrak{x}$ entspricht. Also:

„Wenn in den zwei Ebenen $E$, $E_1$ irgend eine Gerade und der ihr entsprechende Kegelschnitt, z. B. die Gerade $A$ in $E$ und der Kegelschnitt $[A_1]$ in $E_1$, gegeben sind, so entspricht jeder beliebigen Tangente $T_1$ des Kegelschnitts ein bestimmter Kegelschnitt $[T]$ in der andern Ebene, welcher jene Gerade $A$ berührt, und zwar in demjenigen Punkte $\mathfrak{a}$, der dem Berührungspunkt $\mathfrak{a}_1$ jener Tangente entspricht; denjenigen Tangenten aber, welche den gegebenen Kegelschnitt in den Hauptpunkten $x_1$, $y_1$, $z_1$ berühren, entsrechen die Geraden $t\mathfrak{x}$, $s\mathfrak{y}$, $r\mathfrak{z}$, die in der andern Ebene die Ecken des Hauptdreiecks mit denjenigen Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ verbinden, in welchen die gegenüber liegenden Seiten $x$, $y$, $z$ von der gegebenen Geraden $A$ geschnitten werden."

Für den vorerwähnten (b.) Kegelschnitt $[Q_1]$ findet man hiernach seine Tangente $y_1\mathfrak{b}_1$ im Punkte $y_1$, wenn man den Strahl $s\mathfrak{b}$ der Seite $y$ parallel zieht, weil nämlich in diesem Falle die ihm entsprechende Gerade $A$ (oder $Q$), und mithin auch der Punkt $\mathfrak{y}$ in $y$, unendlich entfernt ist. Ebenso wird dessen Tangente am Punkte $z_1$ und ähnlicherweise wird dessen Tangente am Punkte $x_1$ gefunden; oder die letztere kann auch mittelst der zwei erstern gefunden werden (§. 42, IV, 1.). Gleiches folgt für den Kegelschnitt $[R]$.

Zufolge des vorstehenden Satzes und mit Rücksicht auf (§. 36, Ende) und (b.), kann man nun auch leicht erkennen, von welcher Art der Kegelschnitt sei,

welcher irgend einer Geraden in einer der zwei Ebenen $E, E_1$ entspricht, nämlich:

„Der Kegelschnitt, welcher z. B. der Geraden A entspricht, ist entweder 1) Hyperbel, oder 2) Parabel, oder 3) Ellipse, je nachdem die Gerade A den Kegelschnitt [R] 1) schneidet, oder 2) berührt, oder 3) gar nicht trifft."

d) Mittelst der bisherigen Resultate lassen sich nun weiter leicht die Haupteigenschaften derjenigen Figur angeben, welche irgend einer gegebenen krummen Linie entspricht. Denn angenommen es sei C eine beliebige Curve nten Grades in der Ebene E und $C_1$ sei die ihr entsprechende in der Ebene $E_1$, so wird, da C von jedem dem Hauptdreieck rst umschriebenen Kegelschnitt [rst], im Allgemeinen und höchstens, in 2n Punkten geschnitten werden kann, und da allen diesen Kegelschnitten die gesammten Geraden in der Ebene $E_1$ entsprechen (a.), die Curve $C_1$ von jeder dieser Geraden, im Allgemeinen und höchstens, ebenfalls in 2n Punkten geschnitten, und folglich wird diese Curve, im Allgemeinen, vom 2nten Grade sein.

Da ferner die Curve C jede der drei Seiten x, y, z des Hauptdreiecks, im Allgemeinen, in n Punkten schneidet, so mufs die Curve $C_1$ die drei Hauptpunkte $x_1$, $y_1$, $z_1$ zu sogenannten singulären Punkten haben, nämlich jeder derselben ist in Bezug auf sie ein nfacher Punkt (1.). Die n Tangenten der Curve $C_1$ in jedem der drei Punkten $x_1$, $y_1$, $z_1$ sind vermöge der Durchschnittspunkte, in welchen die Seiten x, y, z von der Curve C geschnitten werden, sehr leicht zu finden, denn ist etwa $\mathfrak{y}$ ein solcher Durchschnittspunkt, so ist der dem Strahle $s\mathfrak{y}\mathfrak{b}$ entsprechende Strahl $y_1\mathfrak{b}_1$ eine Tangente der Curve $C_1$ im Punkte $y_1$ (c.). Berührt die Curve C eine der drei Geraden x, y, z, so ent-

spricht dem Berührungspunkt ein **Rückkehrpunkt** in der Curve $C_1$, und zwar, so oft eine jener Geraden von C berührt wird, so viele Rückkehrpunkte der $C_1$ sind in dem, der jedesmaligen Geraden, entsprechenden Punkte $x_1$, $y_1$, $z_1$ vereiniget. Die einem Rückkehrpunkt zugehörige Tangente ist, ebenso wie vorhin, leicht zu finden, sobald nämlich der ihm entsprechende Berührungspunkt gegeben ist. (Sind unter den genannten Rückkehrpunkten auch die **Wendungs-** oder **Beugungspunkte** mit inbegriffen?)

Die Curve $C_1$ wird nothwendigerweise um 1, oder 2, oder 3 Grad erniedrigt, wenn die ihr entsprechende gegebene Curve C durch 1, oder 2, oder alle 3 Hauptpunkte r, s, t geht (d. h. durch jeden nur **einmal** geht), weil nämlich unter diesen Umständen jeder der genannten Kegelschnitte [rst] die Curve C, aufser jenen Punkten, nur in 2n-1, oder 2n-2, oder 2n-3 Punkten schneiden kann.

Wenn insbesondere die gegebene Curve C nur vom 2ten Grad, also ein Kegelschnitt, ist, so ist demnach die ihr entsprechende Curve $C_1$ im Allgemeinen vom 4ten Grad und hat die drei Hauptpunkte $x_1$, $y_1$, $z_1$ zu Doppelpunkten*). Oder wenn man die besondern

*) Berührt der gegebene Kegelschnitt C alle drei Seiten x, y, z des Hauptdreiecks rst, so ist $C_1$, zufolge des Obigen, eine solche Curve 4ten Grades, welche die drei Hauptpunkte $x_1$, $y_1$, $z_1$ zu Rückkehrpunkten hat; und weiter folgt, mit Rücksicht auf (42, IV, 1, links.), **dafs die drei Tangenten in den drei Rückkehrpunkten der Curve $C_1$ einander allemal in irgend einem Punkte treffen.** — Findet dieses letztere bei jeder beliebigen Curve 4ten Grades, welche drei Rückkehrpunkte hat, statt? Oder: entsprechen den gesammten Kegelschnitten, welche dem Hauptdreiseit xyz eingeschrieben werden können, auch die gesammten Curven 4ten Grades, welche die drei Punkte $x_1$, $y_1$, $z_1$, zu Rückkehrpunkten haben?

Fälle mit zusammenfafst, so kann man sagen: „es sei $C_1$ entweder vom 4ten, oder 3ten, oder 2ten, oder 1ten Grad, je nachdem der gegebene Kegelschnitt C entweder durch keinen, oder 1, oder 2, oder alle 3 Hauptpunkte r, s, t geht." Der dritte Fall, wo nämlich $C_1$ vom 2ten Grade, und also auch ein Kegelschnitt ist, folgt auch aus (§. 51, IV, 9.), wonach, wenn z. B. der gegebene Kegelschnitt C durch die Punkte r, s geht, dann seine sämmtlichen Projectionsstrahlen in einem einfachen Hyperboloïd liegen, welches von der andern Ebene $E_1$ in einem Kegelschnitt $C_1$ geschnitten wird, der nothwendigerweise durch die Punkte $z_1$, $y_1$ geht. Dasselbe folgt übrigens auch aus der Eigenschaft, dafs die Strahlbüschel r und $z_1$, s und $y_1$, t und $x_1$ projectivisch sind (a.). Denn geht der Kegelschnitt C etwa durch die Punkte s, t, so erhalten die Strahlbüschel s, t durch ihn eine projectivische Beziehung (§. 38, III.), da sie aber, wie schon bemerkt worden, beziehlich mit den Strahlbüscheln $y_1$, $x_1$ projectivisch sind, so sind folglich auch die letztern unter sich projectivisch und erzeugen einen Kegelschnitt $C_1$, welcher durch ihre Mittelpunkte $y_1$, $x_1$ geht, und welcher offenbar dem Kegelschnitt C entspricht. Also:

„Jedem Kegelschnitt C in der Ebene E, welcher durch irgend zwei der drei Hauptpunkte r, s, t geht (aber nur durch zwei), entspricht in der andern Ebene $E_1$ ebenfalls ein Kegelschnitt $C_1$, welcher durch die jedesmaligen zwei entsprechenden Hauptpunkte $z_1$, $y_1$, $x_1$ geht; und auch umgekehrt."

3) Die vorstehenden Resultate (2) sind die Fundamentalsätze über die Abhängigkeit der Figuren in den zwei Ebenen E, $E_1$ von einander. Es lassen sich aus

ihnen unmittelbar eine grofse Reihe weiterer Folgerungen entwickeln, die zu einigen interessanten Sätzen führen. Nach der Art, wie die Figuren in den zwei Ebenen von einander abhängen, ist nämlich klar, dafs gewisse Eigenschaften und Sätze, welche Figuren oder Gebilden in der einen Ebene zukommen, also die meisten Eigenschaften, Sätze, Aufgaben etc., die im ersten und gegenwärtigen dritten Kapitel über projectivische Gebilde und sonstige Figuren in der Ebene aufgestellt oder betrachtet worden sind, auch auf irgend eine analoge Weise in der andern Ebene (wenn auch bei ganz verschiedenartigen Figuren) statt finden müssen. Einige Beispiele werden hinreichen, diefs zu erläutern.

Den Figuren und Gebilden, ihren Eigenschaften und den ihnen zukommenden Sätzen und Aufgaben in der Ebene E, entsprechen folgender Gestalt die Figuren und Gebilde, deren Eigenschaften, Sätze und Aufgaben in der Ebene $E_1$:

| In der Ebene E ..... | entspricht ..... in der Ebene $E_1$ |
|---|---|
| **A.** | |
| 1) Einem bestimmten Punkte $\mathfrak{a}$: | 1) Ein bestimmter Punkt $\mathfrak{a}_1$. |
| 2) Den einzelnen Eckpunkten r, s, t des Hauptdreiecks: | 2) Sämmtliche Punkte der Seiten $r_1$, $s_1$, $t_1$ des Hauptdreiecks. |
| 3) Den drei Strahlbüscheln r, s, t: | 3) Die drei Strahlbüschel $z_1$, $y_1$, $x_1$. |
| 4) Einer Geraden A, welche durch keinen der drei Hauptpunkte r, s, t geht: | 4) Ein Kegelschnitt $[A_1]$, der durch die drei Hauptpunkte $z_1$, $y_1$, $x_1$ geht. |
| 5) Vier harmonischen Punkten der Geraden A (vermöge 3.): | 5) Vier harmonische Punkte des Kegelschnitts $[A_1]$ (§. 43, II.). |
| 6) Irgend zwei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$; der durch dieselben bestimmten Geraden A; und | 6) Zwei bestimmte Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}_1$; der durch sie und durch die Hauptpunkte $z_1$, |

| | |
|---|---|
| dem durch dieselben und durch die Hauptpunkte r, s, t bestimmten Kegelschitt [T]: | $y_1$, $x_1$ gehende Kegelschnitt $[A_1]$; und die durch dieselben bestimmte Gerade $T_1$. |
| 7) Irgend einem Strahlbüschel B, d. h. der Schaar Gerader die durch irgend einen Punkt B gehen: | 7) Eine Schaar Kegelschnitte $[B_1]$, die durch die Hauptp. $z_1$, $y_1$, $x_1$ und durch einen bestimmten vierten Punkt $B_1$ gehen. |
| 8) Da sich unter den Strahlen dieses Strahlbüschels B, im Allgemeinen und höchstens, zwei befinden, welche den oben (2, c) genannten Kegelschnitt [R] berühren: | 8) So befinden sich unter der Schaar Kegelschnitte $[B_1]$, welche durch vier gegebene Punkte $z_1$, $y_1$, $x_1$, $B_1$ gehen, im Allgemeinen und höchstens, zwei Parabeln. |
| 9) Irgend vier harmonischen Strahlen des Strahlbüschels B, also vier harmonischen Geraden a, b, c, d: | 9) Vier harmonische Kegelschnitte $[a_1]$, $[b_1]$, $[c_1]$, $[d_1]$ der Schaar Kegelschnite $[B_1]$. |
| Diese vier Geraden schneiden jede andere Gerade A in vier harmonischen Punkten (§. 8, II.): | Diese vier Kegelschnitte schneiden jeden Kegelschnitt $[A_1]$ in vier harmonischen Punkten; |
| Und jeden Kegelschnitt [T], der durch ihren Mittelpunkt B geht, ebenfalls in vier harmonischen Punkten: | Und jede Gerade T, die durch ihren vierten Durchschnittsp. $B_1$ geht, auch in vier harmonischen Punkten. |
| 10) Liegt der Mittelpunkt B des Strahlbüschels insbesondere in einer der drei Seiten x, y, z des Hauptdreiecks, etwa in 𝔶 in der Seite y: | 10) So vereinigt sich der 4te Punkt $B_1$ mit dem Hauptpunkt $y_1$ und die Schaar Kegelschnitte $[B_1]$ haben im Punkte $y_1$ eine gemeins. Tangente $y_1 b_1$. |
| 11) Den projectivischen Beziehungen der Geraden und Strahlbüschel, den Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits, und überhaupt den meisten Sätzen, Aufgaben und Porismen, welche im ersten Kapitel untersucht worden: | 11) Analoge Beziehungen, Eigenschaften, Sätze, Aufgaben und Porismen bei Kegelschnitten $[z_1 y_1 x_1]$, d. h. bei Kegelschnitten, welche durch die drei Hauptpunkte $z_1$, $y_1$, $x_1$ gehen. |
| U. s. w. | U. s. w. |

## B.

1) Einem Kegelschnitt [T]; der Schaar Gerader $\mathfrak{S}$ die ihn berühren; und ihren Berührungspunkten:

2) Da sich unter dieser Schaar Gerader $\mathfrak{S}$, im Allgemeinen und höchstens, viere befinden, welche den Kegelschnitt [R] berühren, d. h. gemeins. Tangenten der Kegels. [T], [R] sind:

3) Irgend vier von diesen berührenden Geraden $\mathfrak{S}$, die harmonisch sind (§. 43, II.):

Sie schneiden jede der übrigen, zur Schaar $\mathfrak{S}$ gehörige Gerade, in vier harmonischen Punkten:

Und ihre Berührungspunkte sind vier harmonische Punkte des Kegelschnitts [T]:

4) Da irgend zwei Kegelschnitte [M], [N] von vier bestimmten Geraden a, b, c, d berührt werden:

5) Den zahlreichen Sätzen und Aufgaben, die oben, von (§. 42) bis (§. 48.) aufgestellt sind, und welche sich auf einen Kegelschnitt [T] und auf dessen Sekanten und Tangenten, so wie auf beliebige andere Gerade beziehen, als z. B. den Sätzen über die dem Kegelschnitt [T] um- und eingeschriebenen Sechsecke, Fünfecke, Vierecke und Dreiecke; über harmonische Pole und Gerade, u. s. w.:

1) Eine Gerade $T_1$; die Schaar Kegelschnitt [$\mathfrak{S}_1$] die sie berühren; und ihre Berührungspunkte.

2) So befinden sich unter der Schaar Kegels. [$\mathfrak{S}_1$], die durch 3 Punkte $z_1$, $y_1$, $x_1$ gehen und eine Gerade T berühren, im Allgem. und höchstens, vier Parabeln.

3) Vier von diesen berührenden Kegelschnitten [$\mathfrak{S}_1$], die harmonisch sind;

Sie schneiden jeden der übrigen, zur Schaar [$\mathfrak{S}_1$] gehörigen Kegels., in vier harmonischen Punkten;

Und ihre Berührungspunkte sind vier harmonische Punkte der Geraden T (1.),

4) So giebt es vier Kegels. [$a_1$], [$b_1$], [$c_1$], [$d_1$] wovon jeder irgend zwei gegebene Gerade M, N berührt.

5) Analoge Sätze und Aufgaben, die sich sämmtlich auf die Gerade T und auf die sie schneidenden und berührenden Kegelschnitte [$z_1 y_1 x_1$], so wie auf andere bestimmte Kegelschnitte [$z_1 y_1 x_1$] beziehen.

## C.

| | |
|---|---|
| 1) Einem Kegelschnitt der durch irgend zwei der drei Hauptpunkte r, s, t geht, als etwa einem Kegelschnitt [rs] der durch r, s geht; den sämmtlichen Geraden $\mathfrak{G}$ die ihn berühren, und ihren Berührungspunkten: | 1) Ein Kegelschnitt der durch die entsprechenden zwei Hauptpunkte geht, also ein Kegelschnitt [$z_1 y_1$]; die sämmtlichen Kegelschnitte [$\mathfrak{G}_1$] die ihn berühren, und ihre Berührungspunkte. |
| Da von der Schaar Gerader $\mathfrak{G}$, im Allgemeinen und höchstens, vier den Kegelschnitt [R] berühren: | So befinden sich unter der Schaar Kegelschnitte [$\mathfrak{G}_1$], im Allgemeinen und höchstens, vier Parabeln. |
| 2) Den vorerwähnten Sätzen und Aufgaben (B. 3 u. 5.): | 2) Analoge Sätze und Aufgaben. |
| 3) Der Schaar Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte r, s, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{p}$ (Fig. 55.) gehen: | 3) Die Schaar Kegelschnitte, welche in den Punkten $z_1$, $y_1$ zwei gemeinschaftliche Tangenten haben. |
| 4) Der Schaar Kegelschnitte, die durch zwei Hauptpunkte r, s und durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ gehen, und irgend eine Gerade A berühren: | 4) Die Schaar Kegelschnitte, welche durch die drei entsprechenden Punkte $z_1$, $y_1$, $\mathfrak{p}_1$ gehen, und einen bestimmten Kegelschnitt [$A_1$] berühren. |
| Oder, der Schaar Kegelschnitte, welche durch r, s gehen und die Gerade A in einem gegebenen Punkte $\mathfrak{a}$ berühren: | Die Schaar Kegelschnitte, welche durch $z_1$, $y_1$ gehen und einen Kegelschnitt [$A_1$] in einem Punkte $\mathfrak{a}_1$ berühren. |
| Oder, der Schaar Kegelschnitte, welche durch r, s gehen und irgend zwei gegebene Gerade M, N berühren: | Die Schaar Kegelschnitte, welche durch $z_1$, $y_1$ gehen und zwei bestimmte Kegelschnitte [$M_1$], [$N_1$] berühren. |
| Oder, der Schaar Kegelschnitte, welche durch r, s gehen und den Kegelschnitt [R] in irgend einem Punkt $\mathfrak{q}$ berühren: | Eine Schaar Parabeln, welche durch $z_1$, $y_1$ gehen und deren Axen parallel, nach einem unendl. entfernten Punkt $\mathfrak{q}_1$ gerichtet sind. |

U. s. w.

| | |
|---|---|
| 5) Da irgend zwei Kegelschnitte [rs] im Allgemeinen von vier bestimmten Geraden a, b, c, d berührt werden: | 5) So werden irgend zwei Kegelschnitte [$z_1 y_1$] von vier bestimmten Kegelschnitten [$a_1$], [$b_1$], [$c_1$], [$d_1$] berührt. |

U. s. w.

D.

| | |
|---|---|
| 1) Einem beliebigen Kegelschnitt C; den ihn berührenden Geraden 𝔊; ihren Berührungspunkten: | 1) Eine bestimmte Curve 4ten Grades; die sie berührenden Kegels. [$𝔊_1$]; ihre Berührungspunkte. |
| 2) Den Sätzen und Aufgaben von (§. 42.) bis (§. 48.), namentlich den Porismen in (§. 47.): | 2) Analoge Sätze, Aufgaben und Porismen. |

Hiernach sieht man, dafs, wie schon erwähnt, die meisten Resultate, welche bei frühern Betrachtungen entwickelt worden, und welche sich auf Figuren in der Ebene beziehen, und zwar vorzugsweise das Netzgewebeartige derselben betreffen, sich nach den vorstehenden Schemata auf mehrfache Weise travestiren lassen; nämlich diejenigen Sätze, Aufgaben, etc., wobei blofs Punkte und Gerade (Vielecke, Vielseite, projectivische Gerade und ebene Strahlbüschel, etc.) vorkommen, nach (A.), kommt aufser diesen Elementen noch ein einzelner Kegelschnitt, oder eine gewisse Schaar Kegelschnitte vor, nach (B, C und D.), und kommen in den Sätzen etc., ausser jenen Elementen, beliebige Kegelschnitte vor, nach (D.). Auch lassen sich die neuen Resultate wiederum auf dieselbe Weise umwandeln, u. s. w. Wollte man jedoch diese Umwandlungen weiter wiederholen, so würden sie ins Langweilige führen, sie würden nichts wesentliches Neues enthalten, mithin weniger wichtig sein, als die einfachen Elementarsätze, von welchen sie hergeleitet, und von welchen sie im Grunde nur als Carricaturen erschienen.

Die obigen Sätze (rechts), welche meist nur angedeutet sind, wird man leicht vollständig aussprechen können *). Uebrigens führt der Gang der Betrachtung projectivischer Ebenen und Strahlbüschel noch von einer andern Seite nothwendigerweise auf dieselben zurück, wo sie alsdann theils umfassender, theils mehr ins Einzelne und Besondere eingehend, dargestellt werden sollen.

III. Der vorhergehenden Betrachtung (II.) steht, wie es der in diesem Werk überall beobachtete Gegensatz erheischt, die folgende Betrachtung zur Seite, von welcher ich aber nur sehr kurz einige wesentliche Hauptmomente andeuten werde.

1) Bringt man nämlich mit den Doppelgebilden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ (I.) irgend zwei Strahlbüschel D, $D_1$ in Verbindung, so lassen sich diese, mittelst des den erstern zugehörigen Strahlsystems entsprechenderweise aufeinander beziehen, wie vorhin die Ebenen E, $E_1$. Denn durch jeden Strahl des Strahlsystems $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ geht, im Allgemeinen, eine Ebene sowohl des einen als des andern Strahlbüschels D, $D_1$, z. B. durch einen bestimmten Strahl a wird eine bestimmte Ebene $\alpha$, in D, und eine bestimmte Ebene $\alpha_1$, in $D_1$, gehen; je zwei solche Ebenen sollen „entsprechende Ebenen" (oder jede soll die „schiefe Projection" der andern) heifsen. Jeder Ebene in einem der zwei Strahlbüschel D, $D_1$

*) Es bedeutet nämlich bei den obigen Sätzen (was übrigens auch schon aus dem ganzen Zusammenhang zu schliefsen ist), z. B. das Zeichen $[z_1 y_1 x_1]$: ein oder mehrere Kegelschnitte, welche durch die drei Hauptpunkte $z_1$, $y_1$, $x_1$ gehen; $[z_1 y_1]$: ein oder mehrere Kegelschnitte, welche durch die zwei Hauptpunkte $z_1$, $y_1$ gehen; $[N_1]$, oder $[a_1]$, oder $[\mathfrak{G}_1]$: ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Hauptpunkte $z_1$, $y_1$, $x_1$ geht, und einer bestimmten Geraden N, oder a, oder $\mathfrak{G}$, in E, entspricht; u. s. w. Aehnliches gilt von $E_1$.

entspricht demnach irgend eine bestimmte Ebene im andern Strahlbüschel, und von diesem allgemeinen Gesetz finden, wie man sogleich sehen wird, nur wenige Ausnahmen statt.

Zuvörderst mögen für gewisse Elemente besondere Bezeichnungen und Benennung festgesetzt werden. Nämlich es sollen die zwei Ebenen in D, welche durch die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehen, durch r, s und ihre Durchschnittslinie durch x, und andererseits sollen die zwei Ebenen in $D_1$, welche durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehen, durch $z_1$, $y_1$ und ihre Durchschnittslinie durch $t_1$ bezeichnet werden; x und $t_1$ sind also diejenigen Strahlen der Strahlbüschel D, $D_1$, welche beide Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ scheiden, und folglich zugleich dem Strahlsystem [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] angehören. Ferner soll diejenige Ebene in D, welche durch den Strahl $t_1$ in $D_1$ geht, durch t und die Durchschnittslinien, welche sie mit den Ebenen r, s bildet, durch y, z, und andererseits soll diejenige Ebene in $D_1$, welche durch den Strahl x in D geht, durch $x_1$ und ihre Durchschnittslinien mit den Ebenen $z_1$, $y_1$, durch $s_1$, $r_1$ bezeichnet werden. Die Ebenen r, s, t und $z_1$, $y_1$, $x_1$ sollen fortan die „Hauptebenen," die Strahlen z, y, x und $r_1$, $s_1$, $t_1$ die „Hauptstrahlen," oder die Dreiflache rst und $z_1y_1x_1$ sollen die „Hauptdreiflache" der Strahlbüschel D und $D_1$ heifsen. Auch mögen die Ebenenpaare r und $z_1$, s und $y_1$, t und $x_1$ entsprechende Hauptebenen, und die Strahlenpaare z und $r_1$, y und $s_1$, x und $t_1$ entsprechende Hauptstrahlen genannt werden. Endlich soll derjenige Strahl, welchen beide Strahlbüschel D, $D_1$ gemein haben (die Gerade durch ihre Mittelpunkte D, $D_1$), durch $ee_1$ bezeichnet werden. Sodann lassen sich die vorgenannten Ausnahmen folgender Gestalt angeben (vergl. II, 1.).

„Die

„Die sämmtlichen Ebenen der Ebenenbüschel z, y, x und $r_1$, $s_1$, $t_1$ haben beziehlich die einzelnen Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$ und r, s, t zu entsprechenden Ebenen; und ferner: jede Ebene des Ebenenbüschels $ee_1$ entspricht sich selbst, oder es sind in ihr zwei entsprechende Ebenen vereinigt."

Mittelst der Hauptebenen r, s, t und $z_1$, $y_1$, $x_1$ läfst sich zu jeder gegebenen Ebene des einen oder andern Strahlbüschels D, $D_1$ die ihr entsprechende Ebene finden (ähnlicherweise wie oben entsprechende Punkte (II, 1.)).

2) Es entsteht nun weiter die Frage, wenn in einem der zwei Strahlbüschel D, $D_1$ irgend ein bestimmtes System von Ebenen gegeben sind, welchem Gesetz dann die ihnen entsprechenden Ebenen im andern Strahlbüschel unterworfen seien? Die Antwort hierauf ergiebt sich sehr leicht.

a) Man denke sich zunächst irgend einen Ebenenbüschel A im Strahlbüschel D, so werden dessen Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... durch solche Strahlen a, b, c, ..... des Strahlsystems [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] gehen, welche in einem einfachen Hyperboloïd liegen (I.) oder (§. 51.), und daher werden die ihnen entsprechenden Ebenen $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, ..... in $D_1$ irgend eine bestimmte Kegelfläche zweiten Grades [$A_1$] umhüllen (§. 51, IV, 4.), welche nothwendigerweise dem Hauptdreiflach $z_1 y_1 x_1$ eingeschrieben ist, weil durch jeden der drei Hauptstrahlen z, y, x (in D) eine Ebene des Ebenenbüschels A geht, und weil diesen Ebenen jene Ebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$ entsprechen (I.); (auch berührt die Kegelfläche [$A_1$] diejenige Ebene A($ee_1$), welche durch die Axe A und durch den Strahl $ee_1$ geht, weil dieselbe sich selbst entspricht (I.)). Also:

„Den gesammten Ebenen irgend eines Ebe-

nenbüschels in einem der zwei Strahlbüschel D, $D_1$, wie etwa den Ebenen des Ebenenbüschels A in D, entsprechen im andern Strahlbüschel $D_1$ die gesammten Berührungsebenen irgend einer bestimmten Kegelfläche zweiten Grades [$A_1$], und zwar befinden sich unter den letztern allemal die drei Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$." Oder: „Jedem Strahl in einem der zwei Strahlbüschel D, $D_1$, wie etwa dem Strahl A in D, entspricht im andern Strahlbüschel $D_1$ irgend eine bestimmte Kegelfläche zweiten Grades [$A_1$], welche dem Hauptdreiflach $z_1 y_1 x_1$ eingeschrieben ist, und auch umgekehrt; so dafs also den gesammten Strahlen des einen Strahlbüschels, die gesammten Kegelflächen zweiten Grades entsprechen, welche im andern Strahlbüschel dem Hauptdreiflach eingeschrieben sind."

Bei diesem allgemeinen Gesetz finden folgende Ausnahmen statt. Liegt die Axe des genannten Ebenenbüschels A in einer der drei Hauptebenen r, s, t, so entspricht ihm in $D_1$ ebenfalls ein Ebenenbüschel $A_1$, dessen Axe beziehlich in einer der drei Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$ liegt; (die Ebenenbüschel A, $A_1$ sind projectivisch, liegen ihre Axen in r und z, oder in s und $y_1$, so sind sie perspectivisch, liegen dieselben aber in t und $x_1$, so erzeugen jene ein einfaches Hyperboloïd, welches allemal durch die vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, x, $t_1$ geht; alle möglichen zusammengehörigen Axen A und $A_1$ erzeugen drei Paar projectivische ebene Strahlbüschel r und $z_1$, s und $y_1$, t und $x_1$ (in D und $D_1$), wovon die zwei ersten Paare perspectivisch sind, nämlich sie haben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ zu perspectivischen Durchschnitten und jedes hat den Strahl $ee_1$ zur Projectionsaxe, u. s. w.).

b) Denkt man sich nun weiter ein System von Ebenen in D, welche irgend eine Kegelfläche K vom nten Grad umhüllen, und frägt, was für eine Kegelfläche $K_1$ die ihnen entsprechenden Ebenen in $D_1$ berühren, so ergiebt sich die Antwort ebenfalls sehr leicht. Denn da irgend eine Kegelfläche zweiten Grades [T], welche dem Hauptdreiflach r s t eingeschrieben ist, mit der gegebenen Kegelfläche K, im Allgemeinen und höchstens, $2n(n-1)$ gemeinschaftliche Berührungsebenen hat, so gehen durch irgend einen bestimmten Strahl $T_1$ (der jener Kegelfl. [T] entspricht (a.)) in $D_1$, eben so viele Ebenen, welche die Kegelfläche $K_1$ berühren, und folglich ist die letztere, im Allgemeinen, von der $2n(n-1)$ten Classe (§. 41, III, Note.). Da ferner durch jeden der drei Hauptstrahlen z, y, x, in D, im Allgemeinen $n(n-1)$ Ebenen gehen, welche die gegebene Kegelfläche K berühren, so mufs die Kegelfläche $K_1$ jede der drei Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$, im Allgemeinen, $n(n-1)$ mal berühren; u. s. w. *)

Ist die gegebene Kegelfläche K insbesondere nur vom zweiten Grad, so ist die ihr entsprechende Kegelfläche $K_1$, im Allgemeinen, von der 4ten Classe, und berührt jede der drei Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$ doppelt; oder es ist in diesem Falle die Fläche $K_1$ entweder von der 4ten, 3ten, 2ten, oder 1ten Classe, je nachdem jene Fläche K entweder keine, eine, zwei, oder alle drei Hauptebenen r, s, t berührt. Also:

„Jeder Kegelfläche zweiten Grades K in

*) Ist z. B. die gegebene Kegelfläche K vom zweiten Grade, und geht sie durch die drei Hauptstrahlen z, y, x, so ist die ihr entsprechende Kegelfläche $K_1$ von der vierten Classe, und hat drei Wendungsstrahlen, in welchen sie von den drei Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$ berührt wird, und welche in einer Ebene liegen; u. s. w. (vergl. oben II, 2, d, Note.).

D, welche irgend zwei der drei Hauptebenen r, s, t berührt, entspricht in $D_1$ ebenfalls eine Kegelfläche zweiten Grades $K_1$, welche die zwei entsprechenden (1.) Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$ berührt; und auch umgekehrt."

3) Mittelst der vorstehenden Fundamentalsätze (1. und 2.), über die gegenseitige Beziehung der zwei Strahlbüschel D, $D_1$, lassen sich nun ähnlicherweise, wie oben (II, 3.) bei den Ebenen E, $E_1$, die daselbst angezeigten Reihen von Eigenschaften, Sätzen, Aufgaben, u. s. w. [wenn diese zuerst, vermöge (§. 33. u. §. 48.), auf einen der zwei Strahlbüschel übertragen werden], auf eine neue Art travestiren; ich begnüge mich aber damit, hier darauf aufmerksam gemacht zu haben; im Nächstfolgenden (IV.) sollen einige dahin gehörige Beispiele, wenn auch unter abgeänderter Gestalt, herausgehoben werden.

IV. Die Resultate, welche durch die zwei vorhergehenden Betrachtungen über die zwei Paar Gebilde E und $E_1$, D und $D_1$ entwickelt worden, lassen sich, zufolge (§. 33.), unmittelbar von jedem Paar dieser Gebilde auf das andere übertragen, d. h., die von den Ebenen E, $E_1$ aufgefundenen Eigenschaften (II.) lassen sich auf die Strahlbüschel D, $D_1$, und die von diesen angedeuteten Eigenschaften (III.) lassen sich unmittelbar auf jene übersetzen.

1) Nämlich werden z. B. die Strahlbüschel D, $D_1$, nachdem sie nach obiger Art (III.) mittelst des Strahlsystems [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] auf einander bezogen, durch zwei beliebige Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ geschnitten, so müssen in diesen entsprechende Hauptelemente entstehen, wie sie jenen zukommen, d. h., es entstehen in den Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ zwei Hauptdreiseite $\mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$, deren Seiten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ Hauptgerade und deren Eckpunkte (nach der Ordnung, in der sie den Seiten

gegenüber stehen) $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ Hauptpunkte sind, und diese Hauptelemente werden beziehlich durch die Hauptdreiflache rst und $z_1 y_1 x_1$, Hauptebenen r, s, t und $z_1$, $y_1$, $x_1$, und Hauptstrahlen z, y, x und $r_1$, $s_1$, $t_1$ der Strahlbüschel D und $D_1$ (III, 1.) bewirkt; ferner wird z. B. eine Kegelfläche zweiten Grades, welche einem der zwei Hauptdreiflache eingeschrieben ist, in der zugehörigen Ebene einen Kegelschnitt erzeugen, welcher dem Hauptdreiseit eingeschrieben ist; u. s. w., so dafs also zwischen den zwei schneidenden Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ folgende Beziehung statt findet:

| Den Elementen und Gebilden in der Ebene $\mathfrak{E}$... entsprechen | ...in der Ebene $\mathfrak{E}_1$: |
|---|---|
| **A.** | |
| 1) Irgend einem Strahl a (Gerade): | 1) Ein bestimmter Strahl $a_1$. |
| 2) Dem unendlich entfernten Strahl $\mathfrak{Q}$ (II, 2, b.): | 2) Ein bestimmter, endlich entfernter, Strahl $\mathfrak{Q}_1$. |
| 3) Einem gewissen besondern Strahl $\mathfrak{R}$: | 3) Der unendlich entfernte Strahl $\mathfrak{R}_1$. |
| 4) Den einzelnen Seiten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ des Hauptdreiseits (als Strahlen angesehen): | 4) Die gesammten Strahlen der Strahlbüschel $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$. |
| 5) Den gesammten Strahlen der Strahlbüschel $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$: | 5) Die einzelnen (Haupt-) Strahlen $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$. |
| 6) Den drei Hauptgeraden $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ (als Gebilde angesehen): | 6) Die drei Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$. |
| 7) Irgend einem Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, d. h., irgend einem Punkte $\mathfrak{B}$ und den gesammten durch ihn gehenden Strahlen: | 7) Ein bestimmter Kegelschnitt $[\mathfrak{B}_1]$, der dem Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1$ eingeschrieben, und dessen sämmtliche Tangenten (III, 2, a.); |

oder schlechthin:

| | |
|---|---|
| Irgend einem Punkte $\mathfrak{B}$, welcher nicht in einer der drei Hauptgeraden $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ liegt: | Ein bestimmter Kegelschnitt $[\mathfrak{B}_1]$, welcher dem Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ eingeschrieben ist; |

und also:

| | |
|---|---|
| Den gesammten Punkten, welche nicht in den drei Hauptgeraden $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ liegen: | Die gesammten Kegelschnitte $[\mathfrak{z}_1\, \mathfrak{y}_1\, \mathfrak{x}_1]$, welche dem Hautdreiseit $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ eingeschrieben sind; |
| Den Punkten in den drei Hauptgeraden $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *): | Die Punkte in den drei Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ *). |
| 8) Irgend einer Geraden $\mathfrak{G}$, d. h., der Schaar Punkte, die in irgend einer Geraden $\mathfrak{G}$ liegen: | 8) Eine Schaar Kegelschnitte $[\mathfrak{G}_1]$, d. h., alle Kegels., welche die drei Hauptger. $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ und eine bestimmte vierte Gerade $\mathfrak{G}_1$ berühren. |
| 9) Jener besondern (3.) Geraden $\mathfrak{R}$: | 9) Die Schaar Parabeln $[\mathfrak{R}_1]$, d. h., alle Parabeln, welche dem Hauptd. $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ eingeschrieben werden können. |
| 10) Da die Gerade $\mathfrak{G}$ (8.) der besondern Geraden $\mathfrak{R}$ nur in einem einzigen Punkt begegnet: | 10) So befindet sich unter der Schaar Kegelsch. $[\mathfrak{G}_1]$, (welche 4 Gerade $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{G}_1$ berühren) nur eine einzige Parabel. |
| 11) Geht die Gerade $\mathfrak{G}$ durch einen der drei Hauptpunkte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ (5.): U. s. w. | 11) So vereinigt sich die Gerade $\mathfrak{G}_1$ mit einer der drei Hauptg. $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$, die dann von der Schaar Kegels. $[\mathfrak{G}_1]$ in einem bestimmten Punkt berührt wird. U. s. w. |

B.

| | |
|---|---|
| 1) Irgend zwei Strahlen a, b; | 1) Zwei bestimmte Strahlen $a_1$, $b_1$; |
| dem durch sie bestimmten Punkt $\mathfrak{B}$, d. h., ihrem Durchschnittspunkt; | der durch sie und durch die Hauptg. $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1$ bestimmte Kegels. $[\mathfrak{B}_1]$; |
| und dem durch sie und durch die Hauptgeraden $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ bestimmten Kegels. $[\mathfrak{T}]$: | und der durch sie bestimmte Punkt, d. h., ihr Durchschnittspunkt $\mathfrak{T}_1$. |
| 2) Irgend einem Kegelschnitt $[\mathfrak{T}]$, (der dem Hauptdreiseit $\mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ einges. ist); | 2) Ein bestimmter Punkt $\mathfrak{T}_1$; |

*) Und zwar sind die Geraden $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{x}_1$, in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare, projectivisch.

| | |
|---|---|
| irgend einem Punkt $\mathfrak{P}$ in dessen Umfang; | ein bestimmter Kegelschnitt $[\mathfrak{P}_1]$, der durch ihn geht (und dem Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ einges. ist); |
| und dem ihn in diesem Punkte berührend. Strahl a: | und der in ihm von diesem Kegelschnitte berührte Strahl $a_1$. |
| 3) Irgend einem Kegelschnitt $[\mathfrak{T}]$; | 3) Ein bestimmter Punkt $\mathfrak{T}_1$; |
| der Schaar Punkte $\mathfrak{P}$, die in seinem Umfange liegen; | die Schaar Kegelschnitte $[\mathfrak{P}_1]$, die durch ihn gehen; |
| und den gesammten Strahlen, die ihn berühren: | und die gesammten Strahlen des Strahlbüschels $\mathfrak{T}_1$. |
| 4) Da von der Schaar Punkte $\mathfrak{P}$, die in dem Kegelschnitte $[\mathfrak{T}]$ liegen (3.), im Allgemeinen, und höchstens, zwei in die besondere Gerade $\mathfrak{R}$ fallen: | 4) So sind unter der Schaar Kegelschnitte $[\mathfrak{P}_1]$, (welche drei Gerade $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1$ berühren und durch einen Punkt $\mathfrak{T}_1$ gehen), im Allgem. und höchstens zwei Parabeln. |
| 5) Da irgend zwei Kegelschnitte $[\mathfrak{M}]$, $[\mathfrak{N}]$ (die dem Dreiseit $\mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ einges. sind) einander im Allgem. und höchstens in vier Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ schneiden: | 5) So giebt es im Allgem. und höchstens vier Kegelschnitte $[\mathfrak{a}_1]$, $[\mathfrak{b}_1]$, $[\mathfrak{c}_1]$, $[\mathfrak{d}_1]$, welche durch zwei bestimmte Punkte $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1$ gehen (und drei Gerade $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1$ berühren). |
| U. s. w. | U. s. w. |

C.

| | |
|---|---|
| 1) Irgend einem Kegelschnitt, der irgend zwei der drei Hauptgeraden $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ berührt, z. B. irgend einem Kegelschnitt $[\mathfrak{r}\mathfrak{s}]$, der $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ berührt; der Schaar Punkte $\mathfrak{P}$, die in seinem Umfange liegen; (und der Schaar Strahlen a, die ihn berühren): | 1) Ein bestimmter Kegelschnitt, der durch die entsprechenden zwei Hauptgeraden $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1)$ geht, also z. B. ein bestimmter Kegelschnitt $[\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1]$; die Schaar Kegelschnitte $[\mathfrak{P}_1]$, die ihn berühren; (und die Schaar Strahlen $a_1$, die ihn (und diese Kegels.) berühren). |
| 2) Da von der Schaar Punkte $\mathfrak{P}$ (1.) des Kegelschnitts $[\mathfrak{r}\mathfrak{s}]$, im Allgemeinen und höchstens, zwei in der besondern Geraden $\mathfrak{R}$ liegen: | 2) So sind unter der Schaar Kegelschnitte $[\mathfrak{P}_1]$, (die einen Kegels. $[\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1]$, zwei Tangenten $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_1$ desselben, und eine dritte Gerade $\mathfrak{x}_1$ berühren), im Allgemeinen zwei Parabeln. |

3) Da irgend zwei Kegelschnitte [$\mathfrak{r}\mathfrak{s}$] einander im Allgemeinen in vier Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ schneiden:

U. s. w.

3) So können irgend zwei Kegelschnitte [$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1$] im Allgem. von vier bestimmten Kegelschnitten [$\mathfrak{a}_1$], [$\mathfrak{b}_1$], [$\mathfrak{c}_1$], [$\mathfrak{d}_1$] berührt werden. U. s. w.

## D.

1) Irgend einer beliebigen Curve C des nten Grades:

Da durch jeden der drei Hauptpunkte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ im Allgemeinen n(n-1) Strahlen gehen, welche die gegebene Curve C berühren:

1) Eine bestimmte Curve $C_1$ der 2n(n-1)ten Classe (III, 2, b.).

So mufs jede der drei Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ im Allgemeinen n(n-1) mal von der genannten Curve $C_1$ berührt werden.

U. s. w.

2) Irgend einem beliebigen Kegelschnitt C, der keine der drei Hauptgeraden $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ berührt,

der Schaar Punkte $\mathfrak{P}$, die in seinem Umfange liegen, und der Schaar Strahlen a, die ihn in diesen Punkten berühren:

2) Eine bestimmte Curve $C_1$ 4ter Classe, die jede der drei Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ doppelt berührt;

die Schaar Kegelschnitte [$\mathfrak{P}_1$], die sie berühren, und die Schaar Tangenten $a_1$, die sie mit diesen (in den Berührungsp.) gemein hat.

3) Irgend einem beliebigen Kegelschnitt C, welcher durch jeden der drei Hauptpunkte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ geht:

U. s. w.

U. s. w.

3) Eine solche Curve $C_1$ 4ter Cl., die drei singuläre Punkte hat, in denen sie von den 3 Hauptg. $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ berührt wird, und die in einer Geraden liegen.

Hiernach sieht man, wie die gegenseitige Beziehung der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, (oder der Strahlbüschel D, $D_1$), mit der gegenseitigen Beziehung der Ebenen E, $E_1$ (II.) einerseits übereinstimmt, und andererseits sich von dieser unterscheidet; nämlich sie stimmt dem Umfange nach ganz mit der letzteren überein, so dafs alle jene Eigenschaften, Sätze, Aufgaben etc., von welchen oben (II, 3.) Erwähnung geschah, sich eben so vielfältig durch sie umwandeln lassen, und dafs überhaupt alle daselbst gemachten Bemerkungen auch auf sie An

wendung finden; dagegen aber unterscheidet sie sich von der andern durch die Art der entsprechenden Elemente, und zwar dergestalt, dafs wenn z. B. irgend ein Satz über Figuren in den Ebenen E, $E_1$ gegeben ist, dann der entsprechende Satz in den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ (oder in den Strahlbüscheln D, $D_1$) unmittelbar daraus abgeleitet werden kann, wenn man hier überall: Gerade, Punkt, Hauptdreiseit, eingeschriebener Kegelschnitt, u. s. w. (oder bei D, $D_1$: Ebene, Strahl, Hauptdreiflach, eingeschriebene Kegelfläche etc.) setzt, wo dort, bei E, $E_1$, respective: Punkt, Gerade, Hauptdreieck, umschriebener Kegelschnitt, u. s. w. steht; und auch umgekehrt. Das Zugleichstattfinden der einander entsprechenden Eigenschaften und Sätze in den verschiedenartigen und verschiedenartig auf einander bezogenen Gebilde-Paaren E und $E_1$, D und $D_1$, oder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$, ist eine nothwendige und natürliche Folge davon, dafs die beiderseitigen Beziehungen durch das Strahlsystem [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] bewirkt worden. Aus denselben Gründen findet übrigens auch sogar eine Abhängigkeit zwischen den Eigenschaften irgend zweier ungleichartiger Gebilde statt, was, wie folgt, gezeigt werden kann.

2) Man kann nämlich auch zwei ungleichartige Gebilde, z. B. die Ebene E und den Strahlbüschel $D_1$, mittelst des Strahlsystems [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] auf einander beziehen. Werden zu diesem Endzweck die Punkte, in welchen E von den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ getroffen wird, wie oben (II.), durch r, s, der durch sie gehende Strahl durch x; und werden andererseits die Ebenen in $D_1$, welche durch die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehen, wie oben (III.), durch $z_1$, $y_1$, ihre Durchschnittslinie durch $t_1$; wird ferner der Punkt, in welchem E vom Strahle $t_1$ getroffen wird, durch t, und werden die Geraden, in welchen sie von den Ebe-

nen $z_1$, $y_1$ geschnitten wird, durch z, y; und wird endlich diejenige Ebene in $D_1$, welche durch den Strahl x geht, durch $x_1$, und werden die Strahlen, in welchen sie die Ebenen $z_1$, $y_1$ schneidet (oder welche durch jene Punkte r, s gehen), durch $r_1$, $s_1$ bezeichnet: so kann, in ähnlichem Sinne, wie oben (II. und III.), das Dreieck rst Hauptdreieck der Ebene E, und das Dreiflach $z_1 y_1 x_1$ Hauptdreiflach des Strahlbüschels $D_1$, und ferner können z. B. derjenige Punkt *a* in E und diejenige Ebene $\alpha_1$ in $D_1$, welche beide durch irgend einen und denselben Strahl a des Strahlsystems [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$] bestimmt werden, entsprechende Elemente der Gebilde E, $D_1$ genannt werden, u. s. w., so dafs sich alsdann zwischen diesen zwei Gebilden eine analoge Beziehungstabelle aufstellen läfst, wie oben zwischen gleichartigen Gebilde-Paaren, und was etwa durch folgende einzelne Beispiele erläutert werden mag.

$\alpha$) Den Elementen und Gebilden
in der Ebene E... entsprechen ...im Strahlbüs. $D_1$:

| | |
|---|---|
| 1) Irgend einem Punkte *a* (im Allgem.): | 1) Eine bestimmte Ebene $\alpha_1$. |
| 2) Irgend einer Geraden A, d.h., den gesammten Punkten, die in irgend einer Geraden A liegen, welche durch keinen der drei Hauptpunkte r, s, t geht: | 2) Eine bestimmte Kegelfläche [$A_1$], d. h., die gesammten Berührungsebenen einer Kegelfläche zweiten Grades, welche dem Hauptdreiflach $z_1 y_1 x_1$ eingeschrieben ist. |
| 3) Irgend einem Strahlbüschel B, d. h., den gesammten Geraden, die durch irgend einen Punkt B gehen, welcher in keiner der drei Hauptgeraden z, y, x liegt: | 3) Eine bestimmte Schaar Kegelfl. [$B_1$] zweiten Grades, welche aufser den drei Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$ eine bestimmte vierte Ebene $B_1$ berühren. |
| 4) Irgend einem dem Hauptdreieck rst umschriebenen Kegelschnitt [A]: | 4) Ein bestimmter Strahl $A_1$ (oder Ebenenbüs. $A_1$), der in keiner der 3 Hauptebenen $z_1$, $y_1$, $x_1$ liegt. |

| | |
|---|---|
| 5) Irgend einem Kegelschnitt, welcher durch irgend zwei Hauptpunkte geht, etwa einem Kegelschnitt [rs]: | 5) Eine Kegelfläche 2ten Gr., welche die entsprechenden zwei Hauptebenen berührt, also eine Kegelfläche [$z_1 y_1$]. |

Oder denkt man sich nun wieder die Ebene $\mathfrak{E}_1$, welche den Strahlbüschel $D_1$ schneidet, und behält die oben (1.) für die Hauptelemente derselben festgesetzten Bezeichnungen und Benennungen bei, so hat man zwischen den Ebenen E, $\mathfrak{E}_1$ folgende gegenseitige Beziehung.

$\beta$) Den Elementen und Gebilden in der Ebene E ... entsprechen ... in der Ebene $\mathfrak{E}_1$:

| | |
|---|---|
| 1) Irgend einem Punkt $\mathfrak{a}$, im Allgemeinen: | 1) Irgend eine bestimmte Gerade $\mathfrak{a}_1$. |
| 2) Den gesammten Punkten, welche in einer der drei Hauptgeraden x, y, z liegen: | 2) Eine und dieselbe Gerade, nämlich eine der drei Hauptgeraden $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$. |
| 3) Den einzelnen Hauptpunkten r, s, t: | 3) Die sämmtlichen Strahlen der Hauptstrahlbüschel $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$. |
| 4) Einem gewissen besondern Punkt R: | 4) Die unendlich entfernte Gerade $\mathfrak{R}_1$. |
| 5) Irgend einer Geraden G, welche durch keinen der drei Hauptpunkte r, s, t geht; der Schaar Punkte, die in ihr liegen: | 5) Ein bestimmter Kegelschnitt [$\mathfrak{G}_1$], welcher dem Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ eingeschrieben ist; die Schaar Gerader, die ihn berühren. |

Daher:

| | |
|---|---|
| Den gesammten Geraden (in der Ebene): | Die gesammten Kegelschnitte [$\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$]. |
| 6) Der unendlich entfernten Geraden $\mathfrak{Q}$: | 6) Ein bestimmter besonderer Kegelschnitt [$\mathfrak{Q}_1$]. |
| 7) Irgend einer Geraden, welche durch einen der drei Hauptpunkte r, s, t geht; der Schaar Punkte, die in ihr liegen: | 7) Ein bestimmter Punkt, der in einer der drei Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ liegt; die Schaar Gerader, die durch ihn gehen. |

Oder:

| | |
|---|---|
| Irgend einer Geraden, welche durch einen der drei Hauptpunkte r, s, t geht: | Ein bestimmter Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt in einer der 3 Hauptger. $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ liegt. |

Und also:

| | |
|---|---|
| Den gesammten Strahlen eines der drei Strahlbüschel r, s, t: | Die gesammten Punkte der entsprechenden Hauptgeraden $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$. |
| 8) Irgend einem Strahlbüschel B, d. h., den gesammten Geraden, welche durch irgend einen Punkt B gehen, (der in keiner der drei Hauptger. z, y, x liegt): | 8) Eine Schaar Kegelschnitte [$\mathfrak{B}_1$], d. h., alle Kegelschnitte, welche aufser den drei Hauptg. $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ noch eine bestimmte vierte Gerade $\mathfrak{B}_1$ berühren. |
| 9) Dem besondern Strahlbüschel R (4.): | 9) Die Schaar Parabeln [$\mathfrak{R}_1$], (welche dem Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ eingeschrieben werden können). |
| 10) Da von den Strahlen des Strahlbüschels B (8.) nur ein einziger durch den besondern Punkt R geht: | 10) So befindet sich unter der Schaar Kegelschnitte [$\mathfrak{B}_1$], welche irgend vier Gerade $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{B}_1$ berühren, nur eine einzige Parabel (9.). |
| 11) Irgend einem Kegelschnitt [T], welcher dem Hauptdreieck rst umschrieben ist; der Schaar Punkte, welche in ihm liegen; und der Schaar Gerader, welche ihn berühren: | 11) Ein bestimmter Punkt $\mathfrak{T}_1$; die Schaar Gerader, die durch ihn gehen (d. i. der Strahlb. $\mathfrak{T}_1$); und die Schaar Kegelschnitte [$\mathfrak{T}_1$], die durch ihn gehen (und dem Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ eingeschrieben sind). |

Daher:

| | |
|---|---|
| Den gesammten Kegelschnitten [rst]: | Die gesammten Punkte. |
| 12) Da der Kegelschnitt [T] (11.), im Allgemeinen und höchstens, von zwei Strahlen des Strahlbüschels R (9.) berührt wird: | 12) So sind unter der Schaar Kegels. [$\mathfrak{T}_1$], welche durch einen Punkt $\mathfrak{T}_1$ gehen und drei Gerade $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_1$ berühren, im Allgem., zwei Parabeln [$\mathfrak{R}_1$]. |
| 13) Der Schaar Kegelschnitte [P], welche durch irgend einen Punkt P gehen, (und | 13) Die Schaar Punkte $\mathfrak{P}_1$, welche in irgend einer Geraden $\mathfrak{P}_1$ liegen, (die durch |

dem Hauptdreieck rst umschrieben sind):

14) Der Schaar Kegelschnitte [G], welche irgend eine Gerade G berühren (und dem Hauptdreieck rst umschrieben sind):

15) Der Schaar Parabeln [Q], die dem Hauptdreieck rst umschrieben werden können:

16) Unter der Schaar Kegelschnitte [P], welche durch vier gegebene Punkte r, s, t, P gehen (13.), befinden sich im Allgem. zwei Parabeln;

17) Da irgend zwei Kegelschnitte [M], [N], (welche dem Hauptdreieck rst umschrieben sind), im Allgem. und höchstens, von vier Geraden a, b, c, d berührt werden:

18) Durch drei gegebene Punkte r,s,t gehen, im Allgem. und höchstens, vier Kegelschnitte [a], [b], [c], [d], wovon jeder irgend zwei gegebene Gerade M, N berührt:

U. s. w.

keinen der drei Hauptpunkte $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ geht).

14) Die Schaar Punkte $\mathfrak{G}_1$, welche in einem bestimmten Kegelschnitt [$G_1$] liegen, (der dem Hauptdreis. $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ eingeschrieben ist.)

15) Die Schaar Punkte $\mathfrak{Q}_1$ des besondern (dem Hauptdreis. $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ einges.) Kegelschnitts [$\mathfrak{Q}_1$].

16) Weil die Gerade $\mathfrak{P}_1$ mit dem Kegelschnitt [$\mathfrak{Q}_1$], im Allgemeinen und höchstens, zwei Punkte gemein hat.

17) So giebt es, im Allgem. und höchstens, vier Kegelschnitte [$\mathfrak{a}_1$], [$\mathfrak{b}_1$], [$\mathfrak{c}_1$], [$\mathfrak{d}_1$], welche drei gegebene Gerade $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1$ berühren, und durch zwei gegebene Punkte $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ gehen.

18) Weil irgend zwei Kegelschnitte [$\mathfrak{M}_1$], [$\mathfrak{N}_1$], welche dem Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1$ eingeschrieben sind, einander, im Allgmeinen und höchstens, in irgend vier Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ schneiden. U. s. w.

Wenn insbesondere die Ebene $\mathfrak{E}_1$ mit der Ebene E zusammenfällt, dann decken sich das Hauptdreiseit $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_1$ und das Hauptdreieck rst, und es finden sodann einige merkwürdige Umstände statt, welche später berücksichtigt werden mögen. Eben so giebt es eine besondere gegenseitige Lage für die Ebene E und für den Strahlbüschel $D_1$, durch welche eigenthümliche interessante Umstände verursacht werden, und welche gehörigen Orts (im zweiten Abschnitte) ausführlich entwickelt werden sollen.

3) Es kann nun ferner noch erinnert werden, dafs, da alles, was so eben über die zwei Ebenen E, $\mathfrak{E}_1$ bemerkt worden, ähnlicherweise von zwei Strahlbüscheln D, $\mathfrak{D}_1$, oder da überhaupt alles, was in den vorstehenden Betrachtungen über die Ebenenpaare E und $E_1$ (II.), $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ (1.), E und $\mathfrak{E}_1$ (2.) gesagt und angedeutet worden, ähnlicherweise von Strahlbüschelpaaren D und $D_1$ (III.), $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$, D und $\mathfrak{D}_1$ gilt, dafs also, sage ich, die gesammten Resultate, welche in den vorstehenden Betrachtungen (von II. bis hierher), theils entwickelt, theils blofs angedeutet worden, sich mittelst der Strahlbüschelpaare D und $D_1$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$, D und $\mathfrak{D}_1$ auf die Kugelfläche übertragen lassen (siehe Anmerk. §. 34. und §. 48.).

V. Bei den vorstehenden Betrachtungen sind, ähnlicherweise wie bei vielen früheren Betrachtungen, verschiedene besondere Fälle möglich, die nämlich dadurch entstehen, dafs man den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und den Gebilden E und $E_1$, D und $D_1$, u. s. w. eigenthümliche Lage zukommen läfst, dafs man z. B. die eine oder andere Axe, oder das eine oder andere Gebilde in unendliche Ferne versetzt, u. s. w.; dadurch erhalten dann auch die Resultate eigenthümliche Aussagen, wodurch sie oft mehr Interesse erregen, als die allgemeinen Resultate. In der Folge wird sich Gelegenheit darbieten, alle diese Fälle zu erörtern, wo alsdann, nach vorangegangener Entwikkelung der Eigenschaften projectivischer Ebenen und Strahlbüschel, die Masse der Resultate etwas ausgedehnter und umfassender sein wird. Hier mag zum Schlusse mit den betrachteten Figuren noch folgendes Manöver vorgenommen werden, wodurch einige Eigenschaften, die vorhin mit Stillschweigen übergangen worden, klarer und bestimmter hervortreten, und wodurch man ei-

nes Theils eine freiere Uebersicht über die vorhergehenden Betrachtungen, über deren Zusammenhang und über die daraus entsprungenen Resultate gewinnt.

Das den obigen Betrachtungen zu Grunde liegende Strahlsystem $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$, welches einerseits durch zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, und andererseits durch zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ erzeugt wird, indem nämlich jeder Strahl desselben sowohl durch irgend zwei Punkte dieser Geraden, als durch irgend zwei Ebenen dieser Ebenenbüschel bestimmt wird, kann durch Veränderung der Lage dieser Gebilde in folgende besondere Fälle übergehen. Man kann nämlich einerseits die Geraden, für sich betrachtet, so legen, dafs sie einander schneiden, mithin in irgend einer Ebene liegen, die durch $E_2$ bezeichnet werden mag, wodurch dann offenbar alle Strahlen in diese Ebene hineingezogen werden, und zwar dergestalt, dafs sie genau die gesammten Strahlen (Geraden) dieser Ebene sind; und andererseits kann man die Ebenenbüschel, für sich betrachtet, so legen, dafs ihre Axen sich schneiden, dafs sie mithin in irgend einem Strahlbüschel liegen, der durch $D_2$ bezeichnet werden mag, wodurch dann offenbar alle jene Strahlen in diesen Strahlbüschel zusammengedrängt werden, und zwar dergestalt, dafs sie genau, oder einfach, die gesammten Strahlen dieses Strahlbüschels sind. Denkt man sich nun nebst diesen zwei besondern Strahlsystemen $E_2$ und $D_2$, auch noch zugleich jenes ursprüngliche Strahlsystem $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$, und bezeichnet das letztere, um anzudeuten, dafs es im Raume beliebig liege, durch R, so findet alsdann zwischen den drei Strahlsystemen R, $E_2$, $D_2$ die Beziehung statt, dafs jedem beliebigen Strahl in einem derselben, irgend ein bestimmter Strahl, sowohl in dem einen, als in dem andern, der zwei übrigen (Strahlsysteme) entspricht; z. B. irgend einem Strahl a, in R, welcher die

Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ trifft, und in welchem sich die zwei Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$ der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ schneiden, entspricht in $E_2$ ein bestimmter Strahl $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, und in $D_2$ ein bestimmter Strahl $\alpha\alpha_1$ (d. i. die Durchschnittslinie der Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$). Daher ist leicht zu erachten, dafs gewisse Eigenschaften, welche einem der drei Strahlsysteme zukommen, auch, in irgend einer entsprechenden Form, auf die jedesmaligen beiden übrigen Systeme übergehen müssen, und zwar beruht diese Abhängigkeit vornehmlich auf den projectivischen Eigenschaften der Grundgebilde, d. h., auf den vielfältigen projectivischen Beziehungen der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$. Man denke sich z. B. im ersten Strahlsystem R irgend eine Schaar Strahlen, welche in einem einfachen Hyperboloïd liegen, so werden durch sie einerseits die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und andererseits die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ projectivisch auf einander bezogen, und daher werden, im Allgemeinen, die ihnen entsprechenden Strahlen in $E_2$ einen Kegelschnitt umhüllen, welcher die Hauptgeraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ berührt (§. 38, IV.), und die ihnen entsprechenden Strahlen in $D_2$ werden in einer Kegelfläche zweiten Grades liegen, welche durch die Axen (der Hauptebenenbüschel) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ geht (§. 38, II.). Werden diejenigen zwei Punkte der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in $E_2$, welche in ihrem gegenseitigen Durchschnitte vereiniget sind, durch $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, und werden diejenigen zwei Ebenen der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in $D_2$, welche auf einander fallen, durch $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ bezeichnet, und wird ferner angenommen, es sei e derjenige Strahl in R, welcher zugleich einerseits die Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ verbindet, und andererseits die Durchschnittslinie der Ebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ ist, so werden also, im Falle dieser Strahl e zu der Schaar Strahlen des genannten Hyperboloïds gehört, einer-

einerseits die Hauptgeraden in $E_2$, und andererseits die Hauptebenenbüschel in $D_2$, allemal perspectivisch sein, so dafs folglich in jedem solchen Falle dem Hyperboloïd in R, irgend ein Punkt B (der Projectionspunkt der Hauptgeraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) in $E_2$, und irgend eine Ebene $\mathfrak{B}$ (der perspectivische Durchschnitt der Hauptebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) in $D_2$ entspricht. Einem Hyperboloïd aber, welches nicht durch den Strahl e geht, wird in $E_2$ irgend ein Kegelschnitt, welcher dem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ eingeschrieben, und in $D_2$ irgend eine Kegelfläche zweiten Grades, welche dem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ umschrieben ist, entsprechen. Es ist klar, dafs wenn man umgekehrt die Hauptgeraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in $E_2$ von irgend einem Punkte B aus perspectivisch, oder mittelst eines sie berührenden Kegelschnitts $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ projectivisch auf einander bezieht, dafs dann diesem Punkt, oder diesem Kegelschnitt, irgend ein einfaches Hyperboloïd in R entspricht, welches im ersten Falle durch den Strahl e geht; und dafs Entsprechendes in Hinsicht der Hauptebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in $D_2$ statt findet. Demnach entsprechen den gesammten einfachen Hyperboloïden in R, welche den Strahl e gemein haben, einerseits die gesammten Punkte der Ebene $E_2$, und andererseits die gesammten Ebenen des Strahlbüschels $D_2$; den gesammten Hyperboloïden in R aber, welche nicht durch den Strahl e gehen, entsprechen in $E_2$ die gesammten Kegelschnitte, welche dem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ eingeschrieben, und in $D_2$ die gesammten Kegelflächen zweiten Grades, welche dem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ umschrieben sind. U. s. w.

Zufolge dieser Betrachtung lassen sich also zwischen den drei Strahlsystemen R, $E_2$, $D_2$ ähnliche Beziehungstabellen aufstellen, wie oben in (II, III u. IV.). Die Form dieses Papiers gestattet aber nicht, die entsprechenden Eigenschaften aller drei Systeme neben

19

einander zu stellen, wie es, vermöge ihres Zusammenhanges, eigentlich sein sollte. Sie sollen daher **nur paarweise** neben einander gesetzt werden, und zwar nur die zwei Paare R und $E_2$, $E_2$ und $D_2$. Die Fundamentaleigenschaften, auf denen die Beziehung dieser zwei Paare beruht, sind folgende.

α) Den Elementen und Figuren

| in $E_2$ .........entsprechen | .........in R: |
|---|---|
| 1) Irgend einem Strahle a: | 1) Irgend ein Strahl a. |
| (Dem unendlich entfernten Strahle Q:) | (Der unendlich entfernte Strahl Q.) |
| 2) Irgend einem Punkte B, als Mittelpunkt eines Strahlbüschels angesehen: | 2) Irgend ein einfaches Hyperboloïd [B], welches durch ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und) den Strahl e geht. |
| 3) Also den gesammten Punkten: | 3) Die gesammten einfachen Hyperboloïde, welche die drei Strahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$, e gemein haben. |
| 4) Irgend einer Geraden G, das heifst, der Schaar Punkte, welche in ihr liegen: | 4) Eine Schaar einfache Hyperboloïde [G], welche, aufser $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, e, irgend einen vierten Strahl G gemein haben. |
| (Der unendlich entfernten Geraden Q:) | (Die gesammten hyperbolischen Paraboloïde, welche durch die drei Strahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, e gehen.) |
| 5) Irgend einem Kegelschnitt [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$], welcher die Hauptgeraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ berührt: | 5) Irgend ein einfaches Hyperboloïd [$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$]. |
| 6) Irgend einer Curve C; irgend einem Punkte P in derselben; und der sie in demselben berührenden Tangente T: | 6) Irgend eine geradlinige Fläche C; irgend ein sie berührendes einfaches Hyperboloïd P; und der Strahl, längs welchem es dieselbe berührt. |
| U. s. w. | U. s. w. |

β) Den Elementen und Figuren

| in $E_2$ ..........entsprechen | ..........in $D_2$: |
|---|---|
| 1) Jedem Strahl (Geraden) a: | 1) Irgend ein Strahl a. |

| | |
|---|---|
| 2) Jedem Punkt, oder Strahlbüschel B: | 2) Eine Ebene, oder ein ebener Strahlbüschel 𝔅. |
| 3) Jeder Geraden G, als Gebilde, eine Schaar Punkte enthaltend, angesehen: | 3) Irgend ein Ebenenbüschel 𝔊. |
| (Der unendlich entfernten Geraden Q:) | (Ein bestimmter Ebenenbüschel 𝔔.) |
| 4) Einem Kegelschnitt [𝔄𝔄,], der die Hauptgeraden 𝔄, $𝔄_1$ berührt: | 4) Eine Kegelfläche [𝔄𝔄,] 2ten Gr., die durch die Hauptstrahlen 𝔄, $𝔄_1$ geht. |
| 5) Irdend einem beliebigen Kegelschnitte C: | 5) Irgend eine Kegelfläche 2ten Grades ℭ. |
| 6) Irgend einer beliebigen Curve C; irgend einem Punkte B derselben; und der zugehörigen Tangente T: | 6) Irgend eine bestimmte Kegelfläche ℭ; irgend eine sie berührende Ebene 𝔅; und ihr Berührungstrahl 𝔗. |
| U. s. w. | U. s. w. |

Wird der Strahlbüschel $D_2$ durch irgend eine Ebene $𝔈_2$ geschnitten, so beruht die Beziehung der Ebenen $E_2$ und $𝔈_2$ auf folgenden Fundamentaleigenschaften.

γ) Den Elementen und Figuren

in $E_2$ .......... entsprechen ..... in $𝔈_2$:

| | |
|---|---|
| 1) Jedem Punkt, oder Strahlbüschel B: | 1) Ein Strahl, oder eine Gerade 𝔅. |
| 2) Jedem Strahl, oder jeder Geraden G: | 2) Ein Punkt, oder ein Strahlbüschel 𝔊: |
| (Der unendlich entfernten Geraden Q): | (Ein bestimmter Punkt 𝔔). |
| 3) Jedem Punkt B, und irgend einem durch ihn gehenden Strahle a: | 3) Eine Gerade 𝔅, und irgend ein in ihr liegender Punkt 𝔞. |
| 4) Irgend einer Curve C; irgend einem Punkt P derselben; und der Tangente T in diesem: | 4) Irgend eine Curve ℭ; irgend eine Tangente 𝔓 derselben; und ihr Berührungspunkt 𝔗. |

Daher:

| | |
|---|---|
| 5) Irgend einer Curve C vom nten Grade: | 5) Eine Curve ℭ vom n(n-1) ten Grade, oder von der nten Classe. |
| U. s. w. | U. s. w. |

Wenn bei den Ebenenbüscheln 𝔄, $𝔄_1$, in $D_2$, wie vorhin angenommen worden, die Ebenen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ aufeinander liegen, dagegen die Geraden 𝔄, $𝔄_1$, in $E_2$, so gelegt werden, dafs statt der Punkte 𝔢, $𝔢_1$, irgend zwei andere Punkte, etwa 𝔡, $𝔡_1$, in ihrem Durchschnitte vereinigt sind, und wenn sodann die gegenseitige Beziehung der Strahlsysteme $D_2$, $E_2$, in Rücksicht auf ihre entsprechenden Elemente, wie diese bei ihrem ursprünglichen Zusammenhange in R bestimmt werden, betrachtet wird, so ist diese Beziehung gleich derjenigen, welche zwischen den obigen Gebilden E, $D_1$ (IV, 2, $\alpha$.) statt fand. Das vorstehende Beziehungssystem ($\gamma$.) ist daher nur ein besonderer Fall des obigen (IV, 2, $\beta$.). (Ebenso erhält man, wenn man das Strahlsystem R durch irgend eine Ebene $E_1$ schneidet, ein Beziehungssystem zwischen den Ebenen $E_2$ und $E_1$, welches ein besonderer Fall des obigen (IV, 2, $\beta$.) ist).

Das vorstehende Beziehungssystem ($\gamma$.) enthält übrigens die Fundamentalsätze auf denen die sogenannte „*Théorie des polaires reciproques*" beruht, welche Theorie gewöhnlich mittelst eines Hülfskegelschnitts dargestellt wird (§. 44.), wobei nothwendigerweise beide Systeme von Figuren in einer und derselben Ebene liegen (d. h. die Ebenen $E_2$, $𝔈_2$ liegen aufeinander). Hier stellen sich diese Eigenschaften auf allgemeinere Weise, unabhängig vom Kegelschnitt, dar, und zwar, wie schon bemerkt worden, nur als besonderer Fall des obigen Beziehungssystems (IV, 2, $\beta$.). Indessen gebührt das Verdienst, die genannte Theorie zuerst freier, unabhängig vom Kegelschnitt, aufgefafst zu haben, dem gründlichen Forscher Möbius (Barycentr. Calcül.).

Aus der vorstehenden Betrachtung sieht man, dafs dem Strahlsystem R, welches bei den obigen Betrach-

tungen (II, III u. IV.) nur als Mittel diente, selbst alle Eigenschaften auf bestimmte entsprechende Weise zukommen, welche dort von anderen Gebilden entwickelt und angedeutet worden. In der That sind die Figuren in den obigen Ebenen E, $E_1$ (II.) als beliebige Schnitte (dieser Ebenen und) des Strahlsystems R anzusehen, so dafs also ihre Eigenschaften nur als Folgen der Eigenschaften des letzteren erscheinen; ebenso sind die Strahlbüschel D, $D_1$ (III.) nur mittelst der Eigenschaften des Strahlsystems R aufeinander bezogen worden, u. s. w. Da hiernach gewisse netzgewebeartige Eigenschaften (fast sämmtliche Resultate des ersten und dritten Kapitels) in jedem der 9 Gebilde E, $E_1$, D, $D_1$, 𝔈, $𝔈_1$, 𝔇, $𝔇_1$ und R auf bestimmte entsprechende Weise statt finden: so sind also die Eigenschaften des Strahlsystems R keine eigentlich räumlichen, wiewohl dasselbe den ganzen Raum erfüllt, sondern sie sind blofs solche, welche ihrem wahren Wesen nach der Ebene (E), oder dem Strahlbüschel (D) angehören. (Von eigentlich räumlichen Eigenschaften der Art, wird im dritten und vierten Abschnitte die Rede sein). Auch ist, zufolge der vorstehenden Betrachtung, das Strahlsystem R in der That einerseits als eine durch den ganzen Raum ausgebreitete Ebene $E_2$, und andererseits als ein aufgelöster, durch den ganzen Raum ausgestreuter Strahlbüschel $D_2$ anzusehen. In diesem Sinne lassen sich übrigens auch jene früheren Gebilde E, $E_1$, 𝔈, $𝔈_1$, D, $D_1$, 𝔇, $𝔇_1$ als Umwandlungen der Strahlsysteme $E_2$ und $D_2$ (oder des Strahlsystems R) ansehen, wodurch der Zusammenhang aller dieser Gebilde von einer neuen Seite sich offenbaret, und zwar wie folgt.

Werden nämlich die zwei Geraden 𝔄, $𝔄_1$, so wie sie hier oben in eine Ebene $E_2$ gelegt worden, zum

zweiten Mal in dieselbe, oder in irgend eine andere Ebene $E_2$ gelegt, jedoch so, dafs nicht die nämlichen zwei Punkte $e$, $e_1$ in ihrem Durchschnitte vereinigt sind, wie das erste Mal, so findet zwischen den Strahlsystemen $E_2$, $E_3$, bis auf einige Nebenumstände, offenbar dieselbe Beziehung statt, wie oben zwischen den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ (IV, 1.). Bezeichnet man die zwei ebenen Strahlbüschel, in welchen die oben genannte Ebene $\mathfrak{E}_2$ ($\gamma$.) die Hauptebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, in $D_2$, schneidet, durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, und denkt man sich dieselben zum zweiten Mal (in derselben, oder) in irgend einer andern Ebene $\mathfrak{E}_3$ so gelegt, dafs nicht mehr die nämlichen zwei Strahlen derselben vereinigt sind, wie dort in $\mathfrak{E}_2$, so findet zwischen den Ebenen $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, in Ansehung ihrer entsprechenden Elemente, ähnliche Beziehung statt, wie oben zwischen den Ebenen E, $E_1$ (II.). Entsprechendes findet statt, wenn man die obigen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei verschiedenen Lagen, in einem und demselben, oder in zwei verschiedenen Strahlbüscheln $D_2$, $D_3$, festhält und aufeinander bezieht. In dieser Hinsicht hätten also alle vorhergehenden Beziehungssysteme unmittelbar an die obigen Fundamentalsätze (§. 38.) angeschlossen werden können. Im fünften Abschnitt wird diese letzte Betrachtungsweise ausführlicher erörtert und mit Erfolg angewandt werden.

Zum Schlufse bemerke ich nochmals, dafs alle vorhergehenden Beziehungssysteme auf verschiedene andere, zum Theil einfachere und leichter zu fassende Weisen erzeugt und betrachtet werden können, wobei eines Theils ebenfalls projectivische Eigenschaften (wie hier oben), andern Theils aber andere Bestimmungen zur Grundlage dienen, was durch die späteren Entwickelungen ausführlich gezeigt werden wird. Es werden alsdann die Beziehungssysteme in solcher Allgemein-

heit dargestellt, dafs sie auch diejenigen Fälle umfassen, wo einige von den Hauptelementen (Hauptpunkte, Hauptgerade, u. s. w. siehe oben II, III und IV.), welche bei der gegenwärtigen Betrachtung immer reell waren, imaginär sind. Auch werden dann ähnliche Beziehungssysteme im Raume vorkommen, wo namentlich in gewissen besondern Fällen zwei Räume so aufeinander bezogen werden, dafs jeder Ebene im einen Raume, irgend eine Fläche zweiten Grades im andern Raume entspricht, wodurch man sodann in Stand gesetzt wird, mit Leichtigkeit alle Flächen zweiten Grades unter gewissen Bedingungen zu erzeugen, und ihre Eigenschaften aus den Eigenschaften der ihnen entsprechenden Ebenen abzuleiten *).

---

*) In Bezug auf die gegenwärtige Betrachtung mögen hier noch folgende Beispiele von besondern Beziehungssystemen erwähnt werden. Zufolge jedes der zwei ersten (neben einander stehenden) Sätze in (§. 46, I.) hat man nämlich ein Beziehungssystem zwischen zwei aufeinander liegend gedachten Ebenen, wo z. B. nach dem Satze rechts, die Beziehung darin besteht, dafs jedem beliebigen Punkte $B_2$, in der einen Ebene, irgend ein bestimmter Kegelschnitt $[BB_1]$, in der andern Ebene, entspricht, welcher durch drei bestimmte feste Punkte $B$, $B_1$, $(AA_1)$ geht; u. s. w. Eine andere Art, wodurch solche besondere Beziehungssysteme zu Stande gebracht werden, habe ich bereits im Jahre 1828 in einzelnen Lehrsätzen angedeutet (Journal für Mathematik, Bd. III. S. 211. Lehrs. 22 — 25.). — Wie auf diese Weise andere, zusammengesetztere Systeme der Art aufgestellt werden können, ist leicht zu sehen. Nämlich durch jedes Porisma, worin z. B. die Abhängigkeit zweier Punkte von einander so beschaffen ist, dafs während der eine sich längs irgend einer Geraden (oder Curve) bewegt, der andere irgend eine bestimmte Curve durchläuft, entsteht ein solches Beziehungssystem; u. s. w.

# Anhang.

## Aufgaben und Lehrsätze.

60. Die nachfolgenden Aufgaben und Lehrsätze sind zu dem Zwecke hierher gesetzt, um denjenigen Lesern, welche sich selbstthätig mit der in diesem Werke aufgestellten Methode beschäftigen wollen, Gelegenheit zu geben, sich an zweckmäſsigen Beispielen zu üben. Sollten sich in der That Liebhaber finden, welche dem einen oder andern dieser Sätze ihre Aufmerksamkeit mit Erfolg schenkten, oder welche selbst andere, dahin gehörige, Sätze aufsuchten und bewiesen, und sollte ihnen daran gelegen sein, sie mir mitzutheilen, um sie bekannt zu machen, so würde ich gern bei der nächsten schicklichen Gelegenheit darauf Rücksicht nehmen, oder, im Falle sie nach einer andern Methode behandelt, aber von allgemeinem Interesse wären, würde ich sie Herrn Crelle übergeben und ihn ersuchen, dieselben in sein Journal für Mathematik aufzunehmen. Die Zusendungen müſsten jedoch, wie es sich von selbst versteht, portofrei geschehen, und könnten nach Belieben, an den Herrn Redakteur des genannten Journals oder an mich adressirt werden.

---

1) Wenn in einer Geraden A vier harmonische Punkte und in einem ebenen Strahlbüschel B vier harmonische Strahlen gegeben sind, so sind die zwei Gebilde A, B in Ansehung dieser gegebenen Elemente auf 8 verschiedene Arten projectivisch (§. 8, I, $\beta$.), und können, in Rücksicht auf jede Art, in perspectivische Lage gebracht werden (§. 6.). Wenn nun in einer Ebene die Lage

der Geraden A als fest angenommen und der Strahlbüschel B auf

des Strahlbüschels B als fest angenommen und die Gerade A

alle Arten mit ihr perspectivisch gelegt wird, welche gegenseitige Beziehung haben dann die 8 (oder 16.) Punkte, in welche sein Mittelpunkt fällt?

auf alle Arten mit ihm perspectivisch gelegt wird, welche gegenseitige Beziehung haben dann die 8 (oder 16.) Geraden, in welche sie zu liegen kommt?

2) Die der vorstehenden Aufgabe (1.) entsprechende Aufgabe im Strahlbüschel D, wenn nämlich hier in einem ebenen Strahlbüschel $\mathfrak{B}$ und in einem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ vier harmonische Elemente gegeben sind (§. 53, 15.).

3) Wenn in einer Ebene zwei beliebige Gerade $A$, $A_1$ und in jeder irgend vier harmonische Punkte gegeben sind, so bestimmen die letztern, paarweise genommen, 16 Strahlen $S$, diese schneiden sich in 72 Punkten $P$, u. s. w.; welche Eigenschaft haben die Strahlen $S$ in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage, und welche die Punkte $P$? wie oft liegen von den letztern 3, und wie oft 6 in einer Geraden? u. s. w. (Giebt es z. B. 8 Kegelschnitte, wovon jeder die gegebenen Geraden $A$, $A_1$ und 4 Strahlen $S$ berührt? Liegen unter andern von den Punkten $P$, 8 mal 6 in einer Geraden, und schneiden sich von diesen 4 und 4 in einem Punkt? u. s. w.).

3) Wenn in einer Ebene zwei beliebige Strahlbüschel $B$, $B_1$ und in jedem irgend vier harmonische Strahlen gegeben sind, so schneiden sich die letztern paarweise genommen, in 16 Punkten $P$, diese bestimmen 72 Strahlen $S$, u. s. w.; welche Eigenschaft haben die Punkte $P$ in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage, und welche die Strahlen $S$? wie oft gehen von den letztern 3, und wie oft 6 durch einen Punkt? u. s. w. (Giebt es z. B. 8 Kegelschnitte, wovon jeder durch die Mittelpunkte $B$, $B_1$ und durch 4 Punkte $P$ geht? Gehen unter andern von den Strahlen $S$, 8 mal 6 durch einen Punkt, und liegen von diesen 4 und 4 in einer Geraden? u. s. w.).

4) Die den vorstehenden (3.) ähnlichen Aufgaben im Raume, wenn nämlich in zwei festen Geraden $A$, $A_1$, oder in zwei festen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ vier harmonische Elemente gegeben sind.

5) Die den vorstehenden (3.) ähnlichen Aufgaben, wenn in einem Kegelschnitt zwei mal vier harmonische Punkte, oder zwei mal vier harmonische Tangenten gegeben sind (§. 43, II.).

6) Hierher die obigen Aufgaben (§. 21, IV.).

7) Die den vorstehenden (6.) entsprechenden Aufgaben im Strahlbüschel D, wenn nämlich drei projectivische ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ und drei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gegeben sind.

8) Wenn drei unter sich projectivische Gerade A, $A_1$, $A_2$ im Raume beliebig liegen, so bestimmen je drei entsprechende Punkte derselben eine Ebene: welche krumme Fläche wird von allen diesen Ebenen berührt?

9) Wenn vier unter sich projectivische Gerade im Raume beliebig liegen, wie oft befinden sich dann vier entsprechende Punkte derselben in einer Ebene?

8) Wenn drei unter sich projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ im Raume beliebig liegen, so schneiden sich je drei entsprechende Ebenen derselben in einem Punkt: in welcher krummen Linie liegen alle diese Punkte?

9) Wenn vier unter sich projectivische Ebenenbüschel im Raume beliebig liegen, wie oft treffen sich dann vier entsprechende Ebenen derselben in einem Punkt?

10) Zwei beliebige projectivische Gerade A, $A_1$ in einer Ebene so zu legen, dafs sie einen Kreis erzeugen (§. 40, I.)

11) Zwei beliebige projectivische ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, oder zwei beliebige projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Strahlbüschel D so zu legen, dafs sie einen geraden Kegel erzeugen.

12) Zwei beliebige projectivische Gerade A, $A_1$, oder zwei beliebige projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Raume so zu legen, dafs sie entweder a) ein rundes einfaches Hyperboloïd (dessen Strahlen den Strahlen eines geraden Kegels parallel sind (§. 51, IV.)), oder b) dafs sie das in (§. 53, II, 1.) beschriebene besondere einfache Hyperboloïd erzeugen.

13) Zwei beliebige projectivische ebene Strahlbüschel B, $B_1$ in einer Ebene so zu legen, dafs sie entweder a) die dem Kreise am nächsten kommende El-

lipse, oder b) die am meisten von der gleichseitigen abweichende Hyperbel erzeugen (§. 40, II.).

14) Einen gegebenen Kegel zweiten Grades, oder ein gegebenes einfaches Hyperboloïd (mittelst einer Ebene) in einem Kreise zu schneiden; oder: Wenn zwei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in beliebiger fester Lage gegeben sind, sie mittelst einer Ebene E so zu schneiden, dafs die dadurch entstehenden ebenen Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ gleich und gleichliegend sind, und mithin einen Kreis erzeugen (§. 40, II.); (desgleichen wenn in einem Strahlbüschel D irgend zwei projectivische ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ gegeben sind).

15) Wenn im Raume vier beliebige feste Ebenen gegeben sind, von welcher krummen Fläche werden dann alle Geraden, die von denselben in einem und demselben gegebenen Doppelverhältnifs geschnitten werden, berührt?

Dieser Aufgabe steht eine andere zur Seite; welche? Was findet insbesondere statt, wenn das gegebene Doppelverhältnifs harmonisch ist?

16) Drehen sich zwei beliebige, der Gröfse nach unveränderliche Winkel (ab), ($a_1 b_1$) (Fig. 56.) in einer Ebene dergestalt um ihre festen Scheitelpunkte B, $B_1$, die in einem gegebenen Kegelschnitte liegen, dafs der Durchschnittspunkt $\mathfrak{a}$ zweier ihrer Schenkel a, $a_1$ diesen Kegelschnitt durchläuft, so beschreibt jeder der drei übrigen Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, in denen sich ihre Schenkel paarweise schneiden, einen Kegelschnitt, welcher durch die zwei festen Scheitel B, $B_1$ geht. — Hierzu gehört ein Gegensatz; welcher?

17) Drehen sich zwei der Gröfse nach gegebene Flächenwinkel $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$ um ihre festen Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ dergestalt, dafs die Durchschnittslinie $(\alpha\alpha_1)$ zweier Seiten-Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$ stets eine gegebene feste Gerade

$\mathfrak{A}_1$ trifft, so beschreibt jede der drei übrigen Durchschnittslinien $(\beta\beta_1)$, $(\alpha\beta_1)$, $(\beta\alpha_1)$, welche die Seiten-Ebenen paarweise bilden, ein einfaches Hyperboloïd, welches durch die festen Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ geht. — Hierzu der Gegensatz; wie heifst er?

18) Wenn die Grundlinie eines Dreiecks der Gröfse und Lage nach gegeben ist, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der an derselben liegenden Winkel gegeben ist, so ist der Ort der Spitze des Dreiecks: a) auf zwei gleiche Kreise beschränkt, welche die Grundlinie zur gemeinschaftlichen Sehne haben, oder b) auf zwei gleiche gleichseitige Hyperbeln, welche ebenfalls die Grundlinie zur gemeinschaftlichen Sehne haben.

18) Wenn der Winkel an der Spitze eines Dreiecks der Gröfse und Lage nach gegeben ist, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der ihn einschliefsenden Seiten gegeben ist, so berührt die Grundlinie, in allen ihr zukommenden Lagen, stets eine von vier Parabeln, welche dem gegebenen Winkel (und dessen Neben- und Scheitelwinkel) eingeschrieben sind, und wovon 2 und 2 (die in den Scheitelwinkeln liegen) gleich sind.

19) Wenn ein Kantenwinkel (ab) eines dreikantigen Körperwinkels (abc) der Gröfse und Lage nach gegeben, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der beiden daran liegenden Flächenwinkel gegeben ist, so ist der Ort der dritten Kante c auf vier bestimmte (u. besondere) Kegelflächen zweiten Grades beschränkt, welche dem gegebenen Kantenwinkel (ab) umschrieben, und wovon zwei und zwei einander gleich sind.

19) Wenn ein Flächenwinkel $(\alpha\beta)$ eines dreiflächigen Körperwinkels $(\alpha\beta\gamma)$ der Gröfse und Lage nach gegeben, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der beiden daran liegenden Kantenwinkel gegeben ist, so berührt die dritte Seitenfläche $\gamma$, in allen ihr zukommenden Lagen, stets eine von vier bestimmten Kegelfl. zweiten Gr., welche dem gegebenen Flächenwinkel eingeschrieben, und wovon zwei und zwei gleich sind.

Oder:

Wenn die Grundlinie eines sphärischen Dreiecks der Gröfse und Lage nach gegeben, und wenn entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der daran liegenden zwei Winkel gegeben ist, so ist der Ort der

Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks in zwei gegebenen Hauptkreisen liegen sollen und wenn entweder a) ihre Summe, oder b) ihr Unterschied gegeben ist, so berührt die dritte Seite, in allen ihr möglicherweise

Spitze des Dreiecks auf vier bestimmte sphärische Kegelschnitte beschränkt, welche jene Grundlinie zur gemeinschaftlichen Sehne haben, und wovon zwei und zwei einander gleich sind.

zukommenden Lagen, stets einen von vier bestimmten sphärischen Kegelschnitten, welche jene Hauptkreise berühren, und wovon zwei und zwei einander gleich sind.

20) Bewegen sich zwei Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$, die sich um zwei feste Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ drehen, dergestalt, dafs entweder a) die Summe, oder b) der Unterschied der Winkel, welche sie mit einer festen dritten Ebene E, die jenen beiden Geraden parallel ist, bilden, constant bleibt, so beschreibt ihre Durchschnittslinie $(\alpha\alpha_1)$ ein einfaches Hyperboloïd, welches durch die festen Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ geht. — Wie lautet der hierzu gehörige Satz?

21) Bewegen sich zwei Ebenen $\alpha$, $\alpha_1$, die sich um zwei feste Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ drehen, dergestalt, dafs sie stets irgend zwei zugeordneten Durchmessern eines gegebenen festen Kegelschnitts parallel sind, so beschreibt ihre Durchschnittslinie $(\alpha\alpha_1)$ ein einfaches Hyperboloïd. (Vergl. §. 53, II, 2.). Liegen die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in einer Ebene, so tritt an die Stelle des Hyperboloïds eine Kegelfläche zweiten Grades.

22) Wenn ein Kantenwinkel eines dreikantigen Körperwinkels der Gröfse und Lage nach, und wenn der ihm gegenüberliegende Flächenwinkel der Gröfse nach gegeben ist, in welcher Kegelfläche befindet sich dann die Kante des letztern bei allen ihren verschiedenen Lagen?

22) Wenn ein Flächenwinkel eines dreiflächigen Körperwinkels der Gröfse und Lage nach, und wenn der ihm gegenüber liegende Kantenwinkel der Gröfse nach gegeben ist, welche Kegelfläche berührt dann die Ebene des letztern in allen ihren verschiedenen Lagen?

Diese Aufgaben sind Bedürfnifs in der Stereometrie. Wenn auch die genannten Kegelflächen vom vierten Grade sind, so sind sie vielleicht von solcher besonderen Art, dafs sie deshalb doch bequem bei verschiedenen Konstructionen angewandt werden können.

Wie lauten die den vorstehenden entsprechenden sphärischen Aufgaben? (§. 34. u. §. 48.)

23) Wenn ein der Gröfse nach unveränderlicher Winkel ($aa_1$) sich so um seinen festen Scheitel dreht, dafs seine Schenkel a, $a_1$ stets irgend zwei feste Gerade A, $A_1$ im Raume schneiden, welche krumme Fläche wird dann von der durch die Durchschnittspunkte gehenden Geraden beschrieben?

23) Wenn ein der Gröfse nach unveränderlicher Flächenwinkel ($\alpha\alpha_1$) sich dergestalt bewegt, dafs seine Seitenflächen $\alpha$, $\alpha_1$ stets durch irgend zwei feste Gerade 𝔄, $𝔄_1$ im Raume gehen, welche krumme Fläche wird dann von seiner Kante ($\alpha\alpha_1$) beschrieben?

24) Befinden sich zwei projectivische Gebilde, eine Gerade A und ein ebener Strahlbüschel B, in beliebiger schiefer Lage in einer Ebene, und man zieht durch jeden Punkt der Geraden einen Strahl, welcher entweder a) dem (dem jedesmaligen Punkt) entsprechenden Strahl des Strahlbüschels parallel ist, oder b) welcher zu ihm rechtwinklig ist, so berühren alle solche Strahlen eine bestimmte Parabel, welche auch von der gegebenen Geraden A berührt wird.

25) Befinden sich dieselben Gebilde A, B (24.) in beliebiger schiefer Lage im Raume und man zieht durch die Punkte in A Strahlen, welche den entsprechenden Strahlen in B parallel sind, so liegen dieselben in einem hyperbolischen Paraboloïd (§. 52.); und fället man aus den Punkten in A senkrechte Ebenen auf die ihnen entsprechenden Strahlen in B, so berühren alle diese Ebenen einen bestimmten parabolischen Cylinder (§. 40, III.).

26) Befinden sich zwei projectivische Gebilde, eine Gerade A und ein Ebenenbüschel 𝔄, in schiefer Lage, und man fället aus den Punkten in A Lothe auf die ihnen entsprechenden Ebenen in 𝔄, so liegen alle diese Lothe in einem hyperbolischen Paraboloïd. — Was

findet statt, wenn man durch die Punkte in A Ebenen legt, die den entsprechenden Ebenen in 𝔄 parallel sind?

27) Liegen zwei projectivische ebene Strahlbüschel B, $B_1$ beliebig im Raume und man legt durch irgend einen gegebenen Punkt D Ebenen, wovon jede irgend zwei entsprechenden Strahlen der Strahlbüschel parallel ist, so umhüllen sie eine Kegelfläche D zweiten Grades; oder legt man durch D solche Gerade, wovon jede zu irgend zwei entsprechenden Strahlen der Strahlbüschel der Richtung nach rechtwinklig ist, so liegen sie in einer Kegelfläche zweiten Grades.

28) Sind im Raume irgend zwei Gerade A, $A_1$ und irgend ein Ebenenbüschel 𝔄 in fester Lage gegeben und eine andere Gerade a bewegt sich längs jenen beiden so, dafs sie stets zu irgend einer Ebene des Ebenenbüschels senkrecht ist, so beschreibt sie ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloïd (§. 52, II.).

29) Ist irgend ein Kegel zweiten Grades und sind irgend zwei Gerade A, $A_1$, die auf zwei beliebigen Berührungsebenen desselben senkrecht stehen, gegeben und eine dritte Gerade a bewegt sich so, dafs sie stets jene zwei Geraden schneidet und beständig zu irgend einer Berührungsebene des Kegels rechtwinklig ist, so beschreibt sie ein einfaches Hyperboloïd.

30) Alle Ebenen, welche durch irgend einen festen Punkt D gehen und ein gegebenes einfaches Hyperboloïd in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, berühren einen Kegel D zweiten Grades *). — Beim hyperboli-

*) Alle Ebenen, welche durch irgend einen gegebenen Punkt D gehen und irgend eine gegebene Fläche zweiten Grades in Parabeln schneiden, umhüllen einen Kegel 2ten Grades, welcher dem Asymptoten-Kegel jener Fläche gleich und mit ihm parallel ist.

37) In jeder Durchmesser-Ebene einer Fläche zweiten Grades liegen, im Allgemeinen, zwei zugeordnete zu einander rechtwinklige Durchmesser; welches ist der Ort der letztern bei einem Durchmesser-Ebenenbüschel 𝔄 (d. h. bei einer Schaar Ebenen, die durch einen Durchmesser 𝔄 der Fläche gehen)?

* * *

38) Wenn im Raume irgend zwei Gerade A, $A_1$ und irgend eine ebene Curve nten Grades C gegeben sind, und es bewegt sich eine dritte Gerade a so, daſs sie stets jene drei festen Elemente A, $A_1$, C schneidet, so beschreibt sie eine Fläche vom 2nten Grade, welche jedoch von unzähligen Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... in Curven vom nten Gerade geschnitten werden kann, und zwar bilden alle solche Ebenen einen bestimmten Ebenenbüschel 𝔄. — Es giebt einen andern Satz, welcher diesem zur Seite steht; wie lautet er?

39) Denkt man sich um ein gegebenes Dreieck 𝔵𝔶𝔷 eine Schaar (d. i. alle mögliche) ähnliche Kegelschnitte, von irgend einer bestimmten Gattung, beschrieben, so werden dieselben allemal von irgend einer bestimmten Curve vierten Grades C umhüllt (berührt), welche die drei Eckpunkte des Dreiecks 𝔵, 𝔶, 𝔷 zu singulären Punkten hat. Derjenige Punkt, in welchem jeder Kegelschnitt von der Curve C berührt wird, und derjenige Punkt, in welchem er den dem Dreieck 𝔵𝔶𝔷 umschriebenen Kreis K zum viertenmal schneidet (auſser den Punkten 𝔵, 𝔶, 𝔷), sind allemal Endpunkte eines und desselben Durchmessers des Kegelschnitts. Der Kreis K wird in jedem Punkt von zwei der genannten Kegelschnitte geschnitten, und die zwei Punkte, in welchen diese von der Curve C berührt werden, liegen allemal in einer gleichseitigen Hyperbel, die dem Dreieck 𝔵𝔶𝔷 umschrieben ist; u. s. w.

In Hinsicht der Curve C finden folgende wesentliche Grenzfälle statt: a) Gehen die Schaar Kegelschnitte in *Kreise* über, so fallen sie alle in einen einzigen zusammen, in welchen ebenfalls die Curve C übergeht, und welcher der dem Dreieck *umschriebene Kreis* K ist; b) verwandeln sich die Kegelschnitte in *Parabeln*, so geht die Curve C in eine *unendlich entfernte Gerade* über; und c) sind die Kegelschnitte *gleichseitige Hyperbeln*, so reduzirt sich die Curve C auf einen *Punkt*, nämlich auf denjenigen, in welchem sich die drei Höhen des Dreiecks schneiden, d. h., „durch diesen Punkt geht jede der genannten Hyperbeln."

Welches ist der Ort der Mittelpunkte, und welches ist der Ort der Brennpunkte der vorgenannten Schaar Kegelschnitte?

40) Legt man an je zwei von drei Kreisen $\alpha, \beta, \gamma$ (Fig. 57.), welche irgend einem Dreiseit *xyz* eingeschrieben sind, eine (vierte) gemeinschaftliche Tangente $A$, $A_1$, $A_2$, so bilden diese ein Dreiseit $AA_1A_2$, in welches sich unzählige Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ so beschreiben lassen, dafs ihre Seiten jene Kreise berühren; nämlich legt man aus einem beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$, in $A$, eine Tangente $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ an den Kreis $\gamma$, aus dem dadurch bestimmten Punkte $\mathfrak{a}_1$, in $A_1$, ferner eine Tangente $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ an den Kreis $\alpha$, so berührt allemal die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$ den Kreis $\beta$. — Man erhält einen ähnlichen Satz, wenn man noch den vierten Kreis $\delta$, welcher dem gegebenen Dreiseit *xyz* eingeschrieben werden kann, zu Hülfe nimmt. Beide Sätze sind jedoch nur besondere Fälle des folgenden allgemeinen Satzes (rechts).

41) Werden einem gegebenen Dreieck $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ beliebige n Kegelschnitte umschrieben, und man berücksichtigt die n Punkte B,

41) Werden einem gegebenen Dreiseit *xyz* beliebige n Kegelschnitte eingeschrieben und man legt an je zwei, nach der Reihe

$B_1$, $B_2$, ....., in welchen je zwei, nach der Reihe unmittelbar aufeinander folgende, Kegelschnitte sich schneiden, so lassen sich unzählige n Ecke so beschreiben, dafs ihre Seiten, nach der Reihe, durch jene Punkte gehen, und dafs ihre Ecken, nach der Ordnung, in jenen Kegelschnitten liegen.

unmittelbar aufeinander folgende Kegelschnitte, eine (vierte) gemeinschaftliche Tangente A, $A_1$, $A_2$, ....., so lassen sich unzählige n Ecke so beschreiben, dafs ihre Ecken, nach der Reihe, in jenen Tangenten liegen, und dafs ihre Seiten, nach der Ordnung, jene Kegelschnitte berühren.

Wofern man eine oder zwei Gerade als Kegelschnitt betrachtet, so sind in diesen Sätzen, unter andern, auch die obigen Sätze (§. 23, II u. III.) und (§. 42, I.) als besondere Fälle enthalten. Aufserdem entstehen auch merkwürdige besondere Fälle, wenn angenommen wird, von den gegebenen Elementen 𝔵, 𝔶, 𝔷 und x, y, z sollen einige imaginär oder unendlich entfernt sein.

42) Wenn in einer Ebene ein beliebiges n Seit und alle Ecken eines n Ecks, bis auf zwei, gegeben sind, so sollen diese zwei unter der Bedingung gefunden werden, dafs sodann unendlich viele n Ecke möglich sind, welche zugleich jenem n Seit eingeschrieben und jenem n Eck umschrieben sind. (Der Ort der zwei gesuchten Eckpunkte ist auf zwei bestimmte Gerade beschränkt, welche durch dieselben projectivisch getheilt werden, so dafs also die sie verbindende Seite, in allen ihren möglich verschiedenen Lagen, stets einen bestimmten Kegelschnitt berührt). — Wie heifst die dieser Aufgabe entgegenstehende Aufgabe? Beide Aufgaben finden auch statt, wenn das gegebene n Seit und n Eck nicht in einer Ebene, sondern im Raume (§. 55.) sich befinden, wozu insbesondere die nachererwähnte Aufgabe gehört.

43) Hierher die Aufgabe und der Satz in (§.58. Note.).

44) Wenn in der Ebene ein beliebiges n Eck ge-

geben ist, ein anderes zu beschreiben, welches jenem zugleich um- und eingeschrieben ist. — Moebius hat gezeigt, daſs diese Aufgabe beim Dreieck und Viereck noch nicht möglich ist (Journ. f. Mathem.). Die in (§. 25.) gegebene Auflösung muſs dies bestätigen, wenn man die beiden Vierecke gleich werden und aufeinander fallen läſst; man wird dann finden, daſs bei den aufeinander liegenden projectivischen Geraden $A$, $A_4$ keine entsprechende Punkte vereinigt sind. Eben so muſs man finden können, ob die vorgelegte Aufgabe für das Fünfeck u. s. w. möglich ist.

45) Wenn im Raume irgend ein n Flach (§. 55.) und irgend ein n Eck gegeben:

Ein n Eck (im Raume) zu beschreiben, welches dem n Flach eingeschrieben und jenem n Eck umschrieben ist.

Ein n Flach (im Raume) zu beschreiben, welches jenem n Flach eingeschrieben und dem n Eck umschrieben ist.

Oder:

Wenn im Raume n beliebige Ebenen und n beliebige Punkte gegeben sind, ein n Eck (im Raume, §. 55.) so zu beschreiben, daſs seine Ecken, nach der Reihe, in jenen Ebenen liegen, und seine Seiten, nach der Reihe, durch jene Punkte gehen. — Diese Aufgabe läſst im Allgemeinen $1^2.2^2.3^2 \ldots\ldots n^2 \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$ Auflösungen zu (vergl. §. 25. Note.). Giebt es in der That Fälle, wo alle diese Auflösungen zugleich möglich sind, oder verhält es sich damit so, daſs, während ein Theil derselben möglich ist, die andern nicht statt finden können? Dasselbe kann bei (§. 25.) und (§. 56, 4.) gefragt werden.

46) Zweimal drei zugeordnete harmonische Pole in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt (§. 44.), liegen allemal in irgend einem andern Kegelschnitt.

46) Zweimal drei zugeordnete Harmonische in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt (§. 44.), berühren allemal irgend einen andern Kegelschnitt.

47) Haben irgend drei Kegelschnitte $K$, $K_1$, $K_2$ in einer Ebene zwei gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, so ist der Ort desjenigen Punkts $P$, dessen drei Harmonische in Bezug auf dieselben (§. 44.) sich in irgend einem Punkt $P_1$ schneiden, so wie der Ort dieses letztern Punkts, ein und derselbe bestimmte vierte Kegelschnitt $K_3$, welcher mit jenen dreien die nämlichen zwei Punkte gemein hat; und ferner: die Gerade $PP_1$ geht stets durch einen bestimmten festen Punkt $Q$, welcher der harmonische Pol der Geraden $\mathfrak{rs}$ in Bezug auf den vierten Kegelschnitt $K_3$ ist, und in welchem sich die drei Sekanten, welche die drei gegebenen Kegelschnitte, paarweise genommen, gemein haben (aufser der Sekante $\mathfrak{rs}$), schneiden; u. s. w.;

47) Haben irgend drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ in einer Ebene zwei gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Tangenten $r$, $s$, so berührt jede Gerade $\mathfrak{G}$, deren drei harmonische Pole in Bezug auf dieselben (§. 44.) in irgend einer andern Geraden $\mathfrak{G}_1$ liegen, so wie auch diese letztere Gerade, stets einen und denselben bestimmten vierten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_3$, welcher mit jenen dreien die nämlichen zwei Tangenten gemein hat; und ferner: der Punkt $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1)$ liegt stets auf einer bestimmten festen Geraden $\mathfrak{Q}$, welche die Harmonische des Durchschnittspunkts $(rs)$ in Bezug auf den vierten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_3$ ist, und in welcher die drei Durchschnittspunkte der drei Paar Tangenten, welche die drei gegebenen Kegelschnitte, paarweise genommen, gemein haben, liegen; u. s. w.

48) Wenn in einer Ebene drei beliebige Kegelschnitte gegeben sind, welches ist dann der Ort desjenigen Punkts $P$, dessen drei Harmonische in Bezug auf die Kegelschnitte, sich in irgend einem andern Punkte $P_1$ schneiden? und welche Curve wird von der Geraden $PP_1$ berührt?

48) Wenn in einer Ebene drei beliebige Kegelschnitte gegeben sind, welche Curve wird dann von derjenigen Geraden $\mathfrak{G}$, deren drei harmonische Pole in Bezug auf die Kegelschnitte, in irgend einer andern Geraden $\mathfrak{G}_1$ liegen, berührt? und welches ist der Ort des Durchschnittspunkts $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1)$?

49) Wie steht es mit den vorstehenden Sätzen (47.) und Aufgaben (48.) in den besondern Fällen, wo statt jedes gegebenen Kegelschnitts zwei Gerade (links) oder zwei Punkte (rechts) angenommen werden?

50) Haben irgend vier gegebene Flächen zweiten Grades einen (reellen oder imaginären) Kegel-

50) Haben irgend vier gegebene Flächen zweiten Grades einen gemeinschaftlichen Berührungskegel

schnitt K gemein, so ist der Ort desjenigen Punkts P, dessen vier harmonische Ebenen in Bezug auf dieselben sich in irgend einem andern Punkt $P_1$ schneiden, so wie der Ort des letztern Punkts, eine und dieselbe bestimmte fünfte Fläche desselben Grades, welche mit jenen vieren den nämlichen Kegelschnitt K gemein hat; und ferner: die Gerade $PP_1$ geht stets durch einen bestimmten festen Punkt Q, welcher der harmonische Pol der Ebene K in Bezug auf die fünfte Fläche ist, und durch welchen die Ebenen der sechs Kegelschnitte, welche die vier gegebenen Flächen, paarweise genommen, gemein haben, gehen; u. s. w.

51) Wenn vier beliebige Flächen zweiten Grades gegeben sind, welches ist dann der Ort desjenigen Punkts P, dessen vier harmonische Ebenen in Bezug auf dieselben, sich in irgend einem andern Punkt $P_1$ schneiden? und welches ist der Ort der Geraden $PP_1$? *)

52) Haben irgend zwei Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Punkte, und gehen von den acht Tangenten, von welchen sie in denselben berührt werden, drei durch irgend einen Punkt, so geht allemal noch eine vierte Tangente durch denselben Punkt, und so

𝔎, so berührt jede solche Ebene 𝔈, deren vier harmonische Pole, in Bezug auf jene Flächen, in irgend einer andern Ebene $𝔈_1$ liegen, so wie auch diese letztere Ebene, stets eine und dieselbe bestimmte fünfte Fläche desselben Grades, welche mit jenen vieren den nämlichen Berührungskegel 𝔎 gemein hat; und ferner: die Gerade $(𝔈𝔈_1)$ liegt stets in einer bestimmten festen Ebene 𝔔, welche die harmonische Ebene des Punkts 𝔎 in Bezug auf die fünfte Fläche ist, und in welcher die Mittelpunkte der sechs Berührungskegel, welche die vier gegebenen Flächen, paarweise genommen, gemein haben, liegen; u. s. w.

51) Wenn vier beliebige Flächen zweiten Grades gegeben sind, welche krumme Fläche wird dann von derjenigen Ebene 𝔈 berührt, deren vier harm. Pole in Bezug auf dieselben in irgend einer andern Ebene $𝔈_1$ liegen? und welches ist der Ort der Durchschnittslinie $(𝔈𝔈_1)$? *)

52) Haben irgend zwei Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Tangenten, und liegen von den acht Punkten, in welchen sie von denselben berührt werden, drei in irgend einer Geraden, so liegt allemal noch ein vierter Punkt in derselben Geraden, und so lie-

*) Welche Eigenthümlichkeiten finden bei diesen Aufgaben, so wie bei den Sätzen (50.), statt, wenn für jede angegebene Fläche insbesondere eine Kegelfläche zweiten Grades oder zwei Ebenen angenommen werden?

gehen alsdann auch die vier übrigen Tangenten durch irgend einen und denselben Punkt.

gen alsdann auch die vier übrigen Punkte in irgend einer und derselben Geraden.

Solche Beziehung, wie hier die zwei Kegelschnitte, hat bei den obigen Sätzen (47.) der vierte Kegelschnitt zu jedem der drei gegebenen.

53) Haben irgend zwei Flächen zweiten Grades zwei gemeinschaftliche Kegelschnitte, und haben von den vier Kegelflächen, von welchen sie in denselben berührt werden, zwei einen und denselben Mittelpunkt, so haben alsdann auch die zwei übrigen Kegelflächen irgend einen Punkt zum gemeins. Mittelpunkt.

53) Haben irgend zwei Flächen zweiten Grades zwei gemeinschaftliche Berührungskegel, und liegen von den vier Kegelschnitten, in welchen sie von denselben berührt werden, zwei in einer und derselben Ebene, so liegen alsdann auch die zwei übrigen Kegelschnitte in irgend einer und derselben Ebene.

Solche Beziehung, wie hier die zwei Flächen zweiten Grades, hat bei den obigen Sätzen (50.) die fünfte Fläche zu jeder der vier gegebenen.

54) „Irgend 6 Punkte eines beliebigen Kegelschnitts bestimmen 60 eingeschriebene einfache Sechsecke (§. 19.); in jedem der letzteren liegen die drei Punkte, in welchen die gegenüber liegenden Seiten sich schneiden, in einer Geraden G (§. 42, I.), so dafs also 60 solcher Geraden G statt finden; von diesen 60 Geraden gehen drei und drei durch irgend einen Punkt P, so dafs 20 solcher Punkte P entstehen; und von diesen 20 Punkten liegen 15 mal 4 in einer Geraden g, so dafs jeder in drei solchen Geraden liegt." (Welche Beziehung haben diese 15 Geraden g weiter zu einander?)

54) „Irgend 6 Tangenten eines beliebigen Kegelschnitts bestimmen 60 umschriebene einfache Sechsseite (§. 19.); in jedem der letzteren gehen die drei Diagonalen, welche die gegenüber stehenden Ecken verbinden, durch einen Punkt 𝔓 (§. 42, I.), so dafs also 60 solcher Punkte 𝔓 statt finden; von diesen 60 Punkten liegen drei und drei in irgend einer Geraden 𝔊, so dafs 20 solcher Geraden 𝔊 entstehen; und von diesen 20 Geraden gehen 15 mal 4 durch einen Punkt 𝔭, so dafs jede durch drei solche Punkte geht." (Welche Beziehung haben diese 15 Punkte 𝔭 weiter zu einander?)

„Sind, bei einem und demselben Kegelschnitt, die gegebenen sechs Punkte (links) zugleich die Berüh-

rungspunkte der gegebenen sechs Tangenten (rechts), so sind:

die 60 Geraden G die Harmonischen der 60 Punkte 𝔓 (§. 44.),

die 20 Punkte P die harmonischen Pole der 20 Geraden 𝔊,

die 15 Geraden g die Harmonischen der 15 Punkte 𝔭 in Bezug auf den Kegelschnitt"*).

55) Wenn bei dem vorhergehenden Satze (54.) die 6 Punkte insbesondere so angenommen werden, dafs sie, paarweise, in drei Geraden liegen, welche durch irgend einen und denselben Punkt gehen: welche besondere Lage haben alsdann die 60 Geraden G, die 20 Punkte P, und die 15 Geraden g?

55) Wenn bei dem vorhergehenden Satze (54.) die 6 Tangenten insbesondere so angenommen werden, dafs sie sich, paarweise, in drei Punkten schneiden, welche in irgend einer und derselben Geraden liegen: welche besondere Lage haben alsdann die 60 Punkte 𝔓, die 20 Geraden 𝔊, und die 15 Punkte 𝔭?

56) Besteht, in Betracht der Sätze (54.), der gegebene Kegelschnitt links aus zwei Geraden und rechts aus zwei Punkten, so hat man ferner insbesondere folgende Sätze (§. 23, III.):

„Wenn in jeder von zwei Geraden A, $A_{1}$, die in einer Ebene liegen, drei beliebige Punkte angenommen werden, so lassen sich durch diese, paarweise, 9 Gerade G legen, welche sich, paarweise, in 18 Punkten P schneiden, wovon 6 mal 3 in einer Geraden g liegen, und von diesen 6 Geraden g gehen 3 und 3 durch einen Punkt."

„Wenn in jedem von zwei Strahlbüscheln B, $B_{1}$, die in einer Ebene liegen, drei beliebige Strahlen angenommen werden, so schneiden sich diese, paarweise, in 9 Punkten 𝔓, durch welche sich, paarweise, 18 Gerade 𝔊 legen lassen, wovon 6 mal 3 durch einen Punkt 𝔭 gehen, und von diesen 6 Punkten 𝔭 liegen 3 und 3 in einer Geraden."

*) Bei der ersten Bekanntmachung dieser Sätze (*Annales de Mathematiques*, tom. XVIII.) hatte sich, in Betreff der Geraden g und der Punkte 𝔭, eine Unrichtigkeit eingeschlichen. — Hülfsmittel, durch welche die Sätze sich beweisen lassen, sind im gegenwärtigen Theile enthalten (§. 42. u. §. 46.). — Die Sätze (56.) habe ich ebendaselbst zuerst bekannt gemacht.

57) Wenn in Ansehung der obigen Sätze (54.):

Von den angenommenen sechs Punkten fünf fest bleiben, während der sechste den Kegelschnitt durchläuft: wie bewegen sich dann die 60 Geraden G, wie die 20 Punkte P, und wie die 15 Geraden g?

Von den angenommenen sechs Tangenten fünf fest bleiben, während die sechste sich um den Kegelschnitt herumbewegt: wie bewegen sich dann die 60 Punkte 𝔓, wie die 20 Geraden 𝔊, und wie die 15 Punkte 𝔭?

58) Die Sätze (54.) beziehn sich auf sechs gleichartige Elemente eines Kegelschnitts: welche eigenthümlichen Sätze finden bei sechs ungleichnamigen Elementen statt, d. h., wenn 5, 4, 3, 2, 1 Punkte und respective 1, 2, 3, 4, 5 Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind?

59) Denkt man sich im Raume irgend zwei rechtwinklige Coordinatensysteme um einen und denselben Anfangspunkt, so findet folgendes statt:

Die 6 Coordinatenaxen liegen allemal in irgend einer Kegelfläche zweiten Grades.

Die 6 Coordinatenebenen berühren allemal irgend eine Kegelfläche zweiten Grades.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines umfassendern Satzes. Auch kann er, auf entsprechende Weise, wie der obige (54.), weiter ausgedehnt werden (§. 33. u. §. 48.).

60) Wenn irgend 9 Punkte einer Fläche zweiten Grades gegeben sind, beliebige andere Punkte derselben (durch Konstruction) zu finden; oder: „Welche Relation findet zwischen irgend 10 Punkten einer Fläche zweiten Grades statt?"

Die zweite Frage ist bereits zweimal von der Brüsseler Akademie als Preisaufgabe gegeben worden, aber beidemal, so viel ich weifs, ohne Erfolg.

61) Wenn von der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades irgend acht Punkte gegeben sind,

beliebige andere Punkte derselben (durch Konstruction) zu finden.

62) Durch acht beliebige gegebene Punkte im Raume eine Kegelfläche zweiten Grades zu legen. — Läfst im Allgemeinen vier Auflösungen zu.

63) Welches ist der Ort der Mittelpunkte (Scheitel) aller Kegelflächen zweiten Grades, welche durch irgend 6, oder 7, gegebene Punkte im Raume gehen?

64) Wenn acht beliebige Gerade im Raume gegeben sind, eine Kegelfläche zweiten Grades zu finden, welche dieselben berührt.

65) Welches ist der Ort der Mittelpunkte (Scheitel) aller Kegelflächen zweiten Grades, welche irgend 6, oder 7, gegebene Gerade im Raume berühren?

66) Welches ist der Ort aller Ebenen, welche irgend 6, oder 7, gegebene Gerade im Raume so schneiden, dafs das durch die Durchschnittspunkte bestimmte Sechseck oder Siebeneck irgend einem Kegelschnitt umschrieben ist?

67) Der Ort der Mittelpunkte aller Kegelflächen zweiten Grades, welche irgend einem gegebenen Sechseck im Raume (§. 55.) eingeschrieben sind (d. h. dessen Seiten berühren), ist ein einfaches Hyperboloïd.

Dieser Satz und die vorhergehenden Aufgaben (60. bis 66.) haben ihre zugeordneten; wie lauten sie?

68) Welches ist der Ort des Mittelpunkts der geraden Kegelfläche, a) welche durch irgend 4, oder 5, gegebene Punkte im Raume geht, oder b) welche irgend 4, oder 5, gegebene Gerade im Raume berührt?

69) Welches ist der Ort der Ebene des Kreises, a) welcher irgend 4, oder 5, gegebene Ebenen berührt, oder b) welcher irgend 4, oder 5, gegebene Gerade im Raume schneidet?

70) Welche Eigenschaften hat eine Schaar ähnlicher Sphäroïde, welche durch irgend 4, oder 5, gegebene Punkte im Raume gehen; z. B. von welcher krummen Fläche werden sie umhüllt (vergl. 39.), welches ist der Ort ihrer Mittelpunkte, oder ihrer Brennpunkte? u. s. w.

71) Welches ist der Ort der Mittelpunkte aller einfachen Hyperboloïde, welche durch die Seiten eines gegebenen Vierseits im Raume (§. 55.) gehen?

72) „Eine Kugel zu finden, welche irgend vier gegebene Gerade im Raume berührt."

73) Eine Fläche zweiten Grades zu finden, welche irgend 9 gegebene Gerade im Raume berührt. (Wie viele Auflösungen sind möglich?)

74) Die Axen (d. i. die drei zu einander rechtwinkligen conjugirten Durchmesser) eines gegebenen schiefen Kegels zweiten Grades zu finden.

* * *

75) Werden zwei beliebige Ebenen E, $E_1$ mittelst irgend eines Strahlbüschels D aufeinander projicirt, so dafs jedem Punkt der einen ein bestimmter Punkt in der andern entspricht, und werden sofort die Ebenen in beliebige andere (schiefe) Lage gebracht, so entsteht die Frage, welchem Gesetz sodann die Projectionsstrahlen, d. h., die Geraden, welche die entsprechenden Punkte verbinden, unterworfen seien, oder welche krumme Fläche von ihnen berührt werde? — Diese Aufgabe, nebst der ihr zugeordneten, werden durch die Betrachtungen des zweiten Abschnitts gelöst werden.

76) Wenn man Polyëder nur in Hinsicht der Art oder Gattung ihrer Grenzflächen von einander unterscheidet, d. h., je nachdem diese Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, u. s. w. sind, so giebt es bekanntlich nur einen vierflächigen, zwei fünfflächige, und sieben

sechsflächige Körper *). „Wie viel verschiedene 7, 8, 9, ..... n flächige Körper sind in dieser Hinsicht möglich?" **)

77) Wenn irgend ein convexes Polyëder gegeben ist, läſst sich dann immer (oder in welchen Fällen nur) irgend ein anderes, welches mit ihm in Hinsicht der Art und der Zusammensetzung der Grenzflächen übereinstimmt (oder von gleicher Gattung ist), in oder um eine Kugelfläche, oder in oder um irgend eine andere Fläche zweiten Grades beschreiben (d. h. daſs seine Ecken alle in dieser Fläche liegen, oder seine Grenzflächen alle diese Fläche berühren)?

78) „Fället man aus den Ecken eines beliebigen viereckigen Körpers (dreiseit. Pyramide) Lothe auf die gegenüber liegenden Grenzflächen, so liegen alle vier Lothe, im Allgemeinen, in einem einfachen Hyperboloïd, und zwar gehören sie zu einer und derselben Schaar Strahlen desselben, so daſs es also unzählige Gerade giebt, wovon jede alle vier Lothe schneidet (§. 51.). Wenn insbesondere zwei der vier Lothe sich schneiden, so schneiden sich auch die zwei übrigen; und wenn insbesondere drei Lothe sich schneiden, so schneiden sich nothwendigerweise alle vier in einem und demselben Punkt."

In den besondern Fällen geht offenbar das Hyperboloïd in einen Grenzfall (in zwei Ebenen, und in einen Kegel) über. Bei der ersten Bekanntmachung dieses Satzes (Journal f. Mathem. Bd. II. S. 97.) habe ich die besondern Fälle unrichtig angegeben.

---

*) Siehe System der Geometrie von Schweins.

**) Diese Aufgabe habe ich schon an einem andern Orte (*Annales de Mathem.* tom, XIX. p. 36.) gegeben, aber es ist noch keine Lösung erfolgt.

Es findet ein dem vorstehenden zugeordneter Satz statt; wie heifst er?

79) „Haben irgend zwei vierflächige Körper (dreiseitige Pyramiden) solche Lage, dafs die vier Lothe, welche aus den Ecken des einen in bestimmter Ordnung auf die Grenzflächen des andern gefället werden, in irgend einem Punkt zusammentreffen, so gehen allemal auch diejenigen vier Lothe, welche man in entsprechender Ordnung, aus den Ecken des zweiten auf die Grenzflächen des ersten fället, durch irgend einen und denselben Punkt." Oder:

a) „Fället man aus einem beliebigen Punkt E auf die Grenzflächen ABC, ABD, ACD, BCD irgend eines gegebenen Tetraëders ABCD Lothe Ed, Ec, Eb, Ea, nimmt in diesen Lothen vier beliebige Punkte d, c, b, a, als Ecken eines zweiten Tetraëders dcba an, und fället auf dessen Grenzflächen dcb, dca, dba, cba aus den Ecken A, B, C, D des erstern Lothe Ae, Be, Ce, De, so treffen diese einander allemal in irgend einem Punkte e." Und ferner:

b) „Nimmt man in den vier ersteren Lothen ähnlicherweise vier andere Punkte $d_1$, $c_1$, $b_1$, $a_1$, als Ecken eines dritten Tetraëders an, so wird diesem in gleicher Beziehung ein Punkt $e_1$ entsprechen; und alsdann liegen die vier Durchschnittslinien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ der vier einander entsprechenden Grenzflächenpaare des zweiten und dritten Tetraëders (d. i. die Durchschnittslinien der Ebenenpaare dcb und $d_1c_1b_1$, dca und $d_1c_1a_1$, dba und $d_1b_1a_1$, cba und $c_1b_1a_1$), allemal in irgend einer Ebene ($\alpha\beta\gamma\delta$); und

c) diese Ebene ($\alpha\beta\gamma\delta$) steht allemal auf derjenigen Geraden $ee_1$, welche durch jene zwei genannten Punkte e, $e_1$ geht, senkrecht."

Diesen Satz, nebst den zwei analogen Sätzen in

der Ebene und auf der Kugelfläche, bei welchen nämlich, statt wie hier Tetraëder, ähnlicherweise Dreiecke in Betracht kommen*), habe ich schon an einem andern Orte zu beweisen vorgelegt (Journal f. Mathem. Bd. II. S. 287.). Alle drei Sätze sind übrigens besondere Fälle von etwas allgemeineren Sätzen, wie man zu seiner Zeit sehen wird. Auch haben alle drei Sätze ihre zugeordneten Sätze; wie lauten diese?

80) *α*) „Sind in einer Ebene irgend zwei, einander nicht schneidende, Kreise $M_1$, $M_2$ gegebenen, wovon man sich den einen zunächst innerhalb des andern liegend denken mag, und man beschreibt, in dem zwischen beiden Kreisen liegenden Raume, eine Reihe Kreise $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, ..... so, dafs jeder jene zwei und den ihm unmittelbar vorangehenden berührt, so findet einer von folgenden zwei Fällen statt: entweder a) die Reihe verlängert sich ins Unendliche und ist incommensurabel, oder b) sie kehrt in sich selbst zurück und ist commensurabel, d. h. nachdem sie in jenem Zwischenraum irgend eine Anzahl u Umläufe zurückgelegt hat, gelangt man zu einem nten Kreise $m_n$, welcher den ersten $m_1$ berührt, diesen also zu seinem Nachfolgenden hat, so dafs hier die Reihe sich schliefst."

*β*) „Von diesen zwei Fällen findet immer der nämliche, und zwar auf einerlei Weise, statt, man mag den ersten Kreis $m_1$ annehmen, wo man will, so dafs also das Vorhandensein des einen oder andern Falles lediglich von der Gröfse und Lage der zwei festen Kreise $M_1$, $M_2$ abhängt."

*γ*) „Bezeichnet man die Radien der Kreise $M_1$, $M_2$ durch $R_1$, $R_2$ und den Abstand ihrer Mittelpunkte von einander durch A, so hat man für den Fall, wo die

*) Auch findet ein analoger Satz im Strahlbüschel statt.

genannte Kreisreihe auf die angegebene Art commensurabel ist, folgende einfache Bedingungsgleichung:

$$(R_1 \mp R_2)^2 \mp 4 R_1 R_2 \cdot \text{Tang.}^2 \frac{u}{n} \pi = A^2,$$

woraus jede der fünf Gröfsen $R_1$, $R_2$, $A$, $u$, $n$ gefunden wird, wenn die vier übrigen gegeben sind. Liegen die Kreise $M_1$, $M_2$ ineinander, so hat man die obern, und liegen sie aussereinander, die untern Vorzeichen zu nehmen."

81) „Bei Kreisen auf der Kugelfläche (so wie auch bei geraden Kegeln im Strahlbüschel) finden analoge Umstände statt, wie im vorstehenden Satze bei Kreisen in der Ebene, und zwar hat man die Bedingungsgleichung:

$$\text{Cos.}(R_1 \mp R_2) \pm 2 \text{Sin.} R_1 \text{ Sin.} R_2 \text{ Tang.}^2 \frac{u}{n} \pi = \text{Cos.} A."$$

82) „Es seien $M_1$, $M_3$ irgend zwei Kugeln, wovon, zum leichtern Verständnifs, die eine $M_3$ innerhalb der andern gedacht werden soll, und ferner sei $M_2$ eine beliebige solche Kugel, welche im Zwischenraum zwischen jenen zwei Kugelflächen liegt und sie berührt.

„Wird eine Reihe Kugeln $m_1$, $m_2$, $m_3$, ..... so beschrieben, dafs jede die drei Kugeln $M_1$, $M_2$, $M_3$ berührt, und dafs sie einander der Ordnung nach berühren, so ist sie entweder commensurabel, oder nicht, d. h. entweder a) gelangt man, nachdem die Reihe u Umläufe um die Kugel $M_2$ gemacht hat, zu einer nten Kugel $m_n$, welche wiederum die erste $m_1$ berührt, oder b) dies tritt nie ein, wenn auch die Reihe unendlich fortgesetzt wird."

„Auf diese zwei Umstände hat weder der Ort, wo die Kugel $M_2$ angenommen, noch die Lage, die der ersten Kugel $m_1$ der Reihe angewiesen wird, Einflufs, d. h. es findet immer derselbe Fall und auf dieselbe Weise statt, es mögen die Kugeln $M_2$, $m_1$ unter den vorgenannten Bedingungen angenommen werden, wo man will, so dafs also blofs die Gröfse und Lage der

festen zwei Kugeln $M_1$, $M_3$ über das Vorhandensein des einen oder andern Falles entscheidet."

„Sind $R_1$, $R_3$ die Radien der Kugeln $M_1$, $M_3$, und ist A der Abstand ihrer Mittelpunkte von einander, so hat man für den commensurabeln Fall (a.):

$$(R_1 \pm R_3)^2 \mp 16\, R_1 R_3 \,\mathrm{Sin.}^2 \frac{u}{n}\pi = A^2.$$

Die untern Zeichen gelten für den Fall, wo die festen Kugeln $M_1$, $M_3$ aufser einander liegen.

83) „Nach Angabe des letzten Satzes (82.) berühren die drei Kugeln $M_1$, $M_2$, $M_3$ einander der Reihe nach, und jede von ihnen berührt die Reihe Kugeln $m_1$, $m_2$, $m_3$, ...... Es schliefsen sich daran folgende weitere Eigenschaften."

a) „Die drei Kugeln $M_1$, $M_2$, $M_3$ sind Glieder einer zweiten Kugelreihe $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, ..... wovon jede alle Kugeln jener ersten Reihe und zugleich die ihr unmittelbar vorhergehende berührt."

b) „Die Mittelpunkte jeder Kugelreihe, für sich genommen, liegen in einem Kegelschnitte; die Ebenen der zwei Kegelschnitte sind zu einander senkrecht, und die Hauptscheitel eines jeden, sind zugleich die Brennpunkte des andern, so dafs also entweder $\alpha$) beide Kegelschnitte (gleiche) Parabeln, oder $\beta$) der eine Ellipse und der andere Hyperbel ist."

c) „Beide Kugelreihen hängen so von einander ab, dafs sie zugleich commensurabel, und zugleich incommensurabel sind;

d) und zwar findet für den commensurabeln Fall das folgende merkwürdige Gesetz statt, dafs allemal

$$\frac{u}{n} + \frac{U}{N} = \frac{1}{2}$$

ist,

ist, wobei nämlich U die Zahl der Umläufe und N die Zahl der Glieder der zweiten Kugelreihe bezeichnet (82.)."

Die Sätze 80, 81 und 82. habe ich schon in den *Annales de Mathém.* tom. XVIII., und den Satz 83. im Journal für Mathematik Bd. II, S. 192. zum Beweisen vorgelegt. Im nämlichen Bande des Journals habe ich (S. 290, Lehrs. 59, 60 und 61.) einige besondere Fälle des Satzes 82, so wie (S. 96.) eine Aufgabe, welche den Satz 80 zum Ziele hatte, aufgestellt. In Folge dieser besondern Fälle und dieser Aufgabe hat Clausen im 6ten und 7ten Bande des Journals die Sätze 80 und 81 analytisch bewiesen, ohne dafs er von jenen Sätzen in den Annalen Kenntnifs gehabt zu haben scheint; auch sind seine Ausdrücke der Form nach von den meinigen verschieden. Ein Theil des Satzes 80, nämlich ($\beta$.), ist schon im ersten Bande (S. 256.) des genannten Journals von mir bewiesen. Bei spätern Entwickelungen wird sich Gelegenheit darbieten, alle vier Sätze so elementar als möglich zu beweisen. — Es entstehen verschiedene interessante Fälle, wenn man statt der einen festen Kugel (in 82 u. 83.) eine Ebene, oder statt des einen festen Kreises (in 80. oder 81.) eine Gerade oder ein Hauptkreis annimmt.

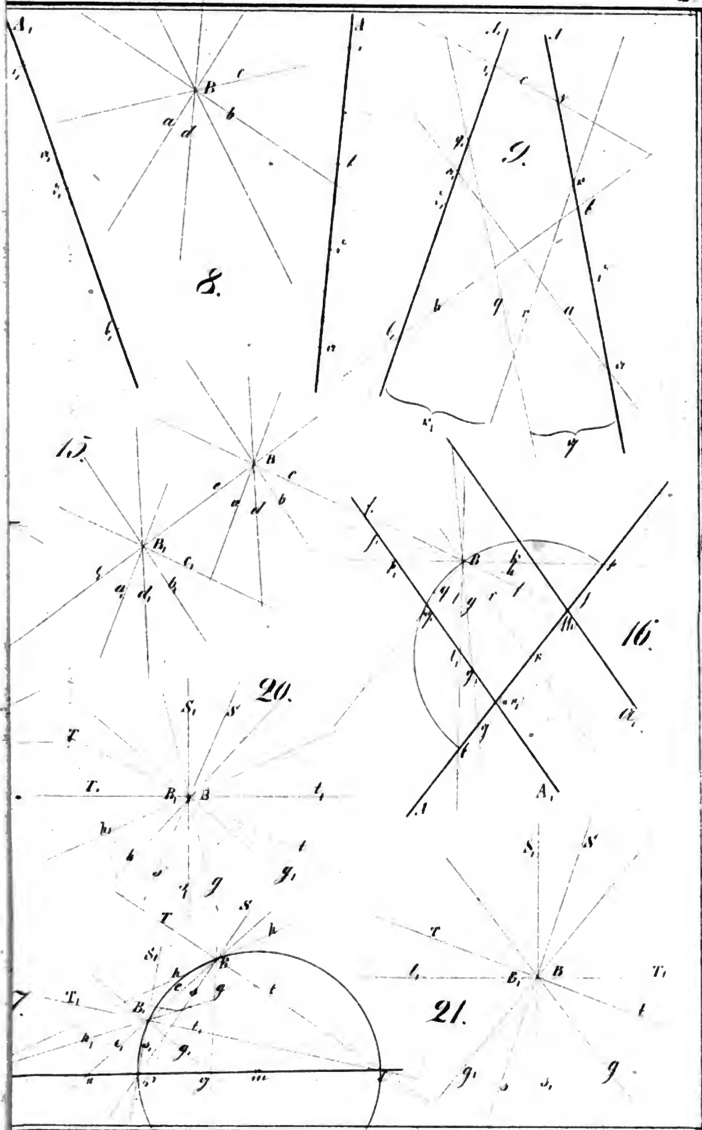
84) Wenn beim letzten Satze (83.) die Kugelreihen commensurabel sind, so findet in jeder für je zwei Kugeln, die als fest angenommen werden, und zwischen denen, nach der Reihe, nur eine andere Kugel liegt, wie z. B. für $M_1$, $M_3$ in der zweiten Reihe, die obige Bedingungsgleichung (82.) statt. Es kann gefragt werden: ob auch für Kugeln, zwischen denen zwei, oder irgend eine Anzahl x, Kugeln liegen, in gleichem Sinne eine Bedingungsgleichung statt finde? und welche es sei?

## Anmerkung.

85) Viele von den vorstehenden Aufgaben und Sätzen lassen sich mittelst der obigen Correlations-Systeme (§. 59.), so wie auch zufolge der Anmerkungen (§. 33, §. 34, u. §. 48.), auf verschiedene Weise umwandeln. Welche sind es? und wie lauten die neuen Aufgaben und Sätze?

Ende des ersten Theils.

Berlin, gedruckt bei A. Petsch.


8.
9.
15.
16.
20.
21.
7.

II

30.

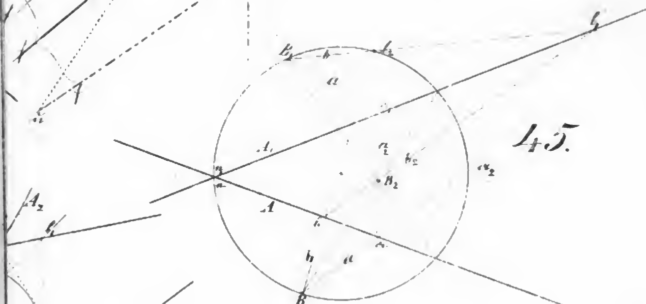
31.

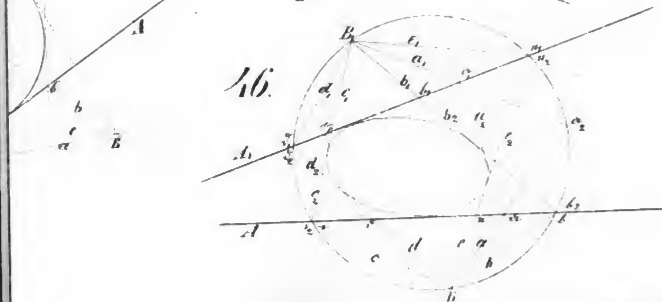
32

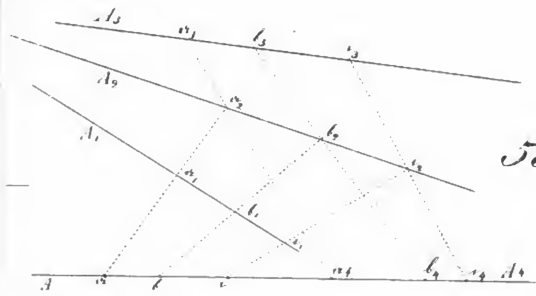
33

34

43.






55.


3 2044 056 237 035






3 2044 056 237 035